清华大学本科生考试第二次阶段测试专用纸

考试课程　　一元微积分　　（B）　2017年10月25日

系名＿＿＿＿＿＿＿＿班级＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿

命题人：张阳阳

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=$＿＿＿＿。

2． $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right|=$＿＿＿＿。

3． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=$＿＿＿＿。

4． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$＿＿＿＿。

5．当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ 关于 x 的阶为＿＿＿。

6．已知 $x_n=\dfrac{3}{2}\bullet\dfrac{5}{4}\bullet\dfrac{17}{16}\bullet\ldots\bullet\dfrac{1+2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$＿＿＿＿。

7．设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\ldots\left(1+a^{2^n}\right)$，其中 $|a|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$＿＿＿＿。

8．已知有整数 $n(n>4)$ 使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^n+7x^4+2\right)^\alpha-x\right]=A\neq 0$，则 $\alpha=$＿＿。

9． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\,\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\,\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\ldots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)=$＿＿＿＿。

10． $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=$＿＿＿＿。

11． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\ldots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right)=$＿＿＿＿。

12． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}=$＿＿＿＿。

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}=$________。

14. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{n^{\beta}-\left(n-1\right)^{\beta}}=2017$，则$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}\right|=$________。

15. 设常数$k<0$，函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$内的零点个数为________。

二．计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细计算过程和必要的根据！）

1.（10 分）证明：数列$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\ldots$
收敛，并求其极限。

2.（10 分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(n+1-k\right)\left[nC_n^k\right]^{-1}$。

3.（10 分）已知函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}$ ，试回答下列问题：

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求函数 $f(x)$ 的具体表达式；

（3）求函数 $f(x)$ 所有的间断点，并指出间断点的类型；

（4）求函数 $f(x)$ 的值域，并画出函数 $f(x)$ 的图像。

4. （10 分）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1, x<-1\\ x^3, -1\le x<2\\ x^2+4, x\ge 2\end{cases}$，设 α,β 分别是 $y=f\left(x\right)$ 的反函数 $y=g\left(x\right)$ 的不可导点中横坐标的最小值和最大值，试回答下列问题：

（1）求 α,β；

（2）设 $x_0\in\left(\alpha,\beta\right), x_{n+1}=\dfrac{2\left(1+x_n\right)}{2+x_n}, n=0,1,2,\ldots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

三．证明题（共 15 分，共 2 题）（请写出详细的证明过程！）

1.（7 分）设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1,\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，且函数 $f(x)$ 的导函数为

$f`(x)=\dfrac{1}{e^x+|f(x)|}(x>0)$，求证：$1\le A\le 1+\ln 2$。

2．（8 分）设函数 $f(x)$ 在 R 上连续，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求证：$\exists\xi\in R$ 使得

$f(\xi)+\xi=0$。