

高等数学 A 上册资料

第一、二章 函数、极限与连续

第三章 导数与微分

第四章 微分中值定理与导数应用

第五章 不定积分

第六章 定积分

第七章 无穷级数

第一、二章 函数、极限与连续

第一讲 函数

教学目的和要求： 深刻理解一元函数的概念， 熟悉函数的几种特性、 运算， 能熟练作出基本初等函数的图形。

知识点： 一元函数的定义、函数的特性、函数的运算、基本初等函数、分段函数。

重点： 一元函数的定义（着重强调自变量与因变量之间的单值对应关系）， 函数的几种特性， 基本初等函数。

难点： 复合函数、反函数、分段函数

教学方式： 多媒体， 讲授

教学思路： 本讲实际上是复习中学有关一元函数的内容， 通过这一次课， 让学生对一元函数 $y = f(x)$ 有一个统一、 准确的认识， 尤其要深刻理解其中 x 与 y 之间的单值对应关系， 熟悉函数的特性、运算、图形、强调对分段函数的讲解， 为以后讲函数的连续、求导做准备。

教学过程：

一、函数的概念

定义 1 设 A 、 B 是两个实数集，称映射 $f: A \rightarrow B$ 为一元函数，简称函数，记作

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in A$$

其中 x 称为自变量， y 称为因变量， $f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的函数值， A 为 f 的定义域，记作 $D(f)$ 、 $f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\}$ 称为 f 的值域，记作 $R(f)$ 。

注意：函数的两个基本要素：定义域和对应法则， x 与 y 之间必须是单值对应关系。
函数常用的表示方法：列表法、图示法、公式法。

例 1 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解：必须满足条件：

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{得} \quad 1 < x \leq 2$$

$\therefore$ 函数的定义域为： $(1, 2)$ 。

例 2 求函数 $y = \sqrt{6x^2+7x+2} + \arcsin \frac{2x}{1+x}$ 的定义域。

解： x 必须满足条件

$$\begin{cases} 6x^2+7x+2 \geq 0 & <1> \\ -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1, x \neq -1 & <2> \end{cases}$$

由 <1> $6x^2+7x+2 = (3x+2)(2x+1) \geq 0$ ，解之得

$$x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

由 <2>，当 $x < -1$ ，即 $x+1 < 0$ 时，<2>变为 $-(1+x) \geq 2x \geq 1+x$ ，无解。

当 $x > -1$ ，即 $x+1 > 0$ 时，<2>变为 $-(1+x) \leq 2x \leq 1+x$ ，解之得： $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

$\therefore$ 函数的定义域为： $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

分段函数：在定义域的不同子集上用不同的表达式来表示对应法则的函数。

例 3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

例 4 取整函数 $y = [x], (x \in \mathbb{R}), [x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

如： $[-3.2] = -4$ $[3.55] = 3$ $[\sqrt{3}] = 1$ $[\pi] = 3$

$$[\frac{\pi}{2}] = 1 \quad [\frac{\pi}{4}] = 0$$

$$\text{例 5 } y = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

例 6 $y = |x-1| + |x-2|$

即

$$y = \begin{cases} 3-2x & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x-3 & x \geq 2 \end{cases}$$

例 7 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ \sin x & 1 < x < 2 \\ e^x & x > 0 \end{cases} \quad \text{求 } f(-1), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f(5)$$

解：略

通过分段函数的学习，进一步理解函数的概念，扩大学生认识函数的范围，为以后讲解函数的连续性创造条件。

二、函数的图形

定义 2 称集合 $\{(x, y) | y = f(x), x \in D(f)\}$ 为函数 f 的图形，记为 $G(f)$ 。函数 f 的图形是坐标平面上一些特定点 (x, y) 的集合。

注意：与 x 轴垂直的直线与函数曲线最多只能有一个交点。

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，数集 $X \subset D$ ，如果存在正数 M ，使对于任意 $x \in X$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $y = f(x)$ 在集 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界。

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subset D$ ，若对于任意的 $x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，或 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则分别称 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增加函数或单调减少函数。

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x \in D$ ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$ ，则称 $f(x)$ 为偶函数。

奇函数的图形关于原点对称，因为 $(-x, -f(x))$ 也在图形上。

同理可以说明偶函数的图形关于 y 轴对称。

4. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，如果存在一个不为零的数 T ，使得对于任意 $x \in D$ ，有 $(x \pm T) \in D$ ，且

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数， T 称为周期。

若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $nT (n \in \mathbb{N})$ 也是 $f(x)$ 的周期，周期中的最小正值称为最小正周期，通常周期均指最小正周期，如 $y = \sin x$ ， $T = 2\pi$ 。

例 8 证明下列函数在所示区间内有界

- 1) $f(x) = \lg x / x$ $[\frac{1}{2}, 1]$
 2) $f(x) = \lg x / x$ $[1, +\infty)$

证明 1) 只要证明 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上是单调的, 则有界。

设 $\frac{1}{2} \leq x < x_2 \leq 1$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\lg x_1}{x_1} - \frac{\lg x_2}{x_2} = \frac{x_2 \lg x_1 - x_1 \lg x_2}{x_1 x_2}$$

而 $\lg x_1 < \lg x_2, x_2 > 0$, 有 $x_2 \lg x_1 < x_2 \lg x_2$

于是 $f(x_1) - f(x_2) < \frac{(x_2 - x_1) \lg x_2}{x_1 x_2}$

由于 $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 > 0, \lg x_2 \leq 0$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < \frac{(x_2 - x_1) \lg x_2}{x_1 x_2} \leq 0$

即 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上是单调的或 $|f(x)| \leq 2 \lg 2$ 因而有界。

2) 因 $x \geq 1$, 则 $\frac{\lg x}{x} \geq 0$

设 $x \in [1, +\infty)$ 则 $10^x > x$, 故 $\frac{\lg x}{x} < 1$ 。

所以 $0 \leq f(x) < 1$ 或 $|f(x)| \leq 1$ ($m=1$) $x \in [1, +\infty)$, $f(x)$ 有界

例 9 讨论函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

解: 函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$

因 $f(-x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \right)$

$$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

所以, $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数。

例 10 试证 $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 2x-3 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 是奇函数

证明: 设 $x \in [-\pi, 0)$, 则 $-x \in (0, \pi]$, 由于 $f(x) = 2x-3$

$$f(-x) = 2(-x) + 3 = -(2x-3), \therefore f(-x) = -f(x)$$

设 $x \in (0, \pi]$, 则 $-x \in [-\pi, 0)$, 由于 $f(x) = 2x+3$

$$f(-x) = 2(-x) - 3 = -(2x + 3) \therefore f(-x) = -f(x)$$

又 $f(0) = 0$ 于是对于任何 $x \in [-\pi, \pi]$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 从而 $f(x)$ 是奇函数。

例 11 函数 $f(x) = x - [x]$ 是否为周期函数, 如果是确定其最小正周期。

解: 对任何 x , 存在整数 n , 使 $n \leq x < n+1, [x] = n$,

$$\text{则 } f(x + T) - f(x) = x + T - [x + T] - x + [x] = T - [x + T] + [x]$$

当 T 为整数时, 由于 $n + T \leq x + T < n + 1 + T$,

故 $[x + T] = n + T = [x] + T$, 于是有

$$f(x + T) - f(x) \equiv 0 \quad (T \in \mathbb{Z})$$

$\therefore f(x) = x - [x]$ 是周期函数, 最小正周期为 1。

四、函数的运算

1. 函数的四则运算

设 f, g 是定义域分别为 $D(f), D(g)$ 的函数, 定义 f, g 的和、差、积、商如下:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad x \in D(f) \cap D(g)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad x \in D(f) \cap D(g)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad x \in D(f) \cap D(g) \text{ 且 } g(x) \neq 0$$

特别地 $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), x \in D(f), \lambda \in \mathbb{R}$, λf 称为 f 与 λ 的数。

2. 复合函数

定义 3 设有两个函数 $u = \varphi(x)$ 和 $y = f(u)$, 如果函数 $u = \varphi(x)$ 将集合 D_φ 映入 $\varphi(D_\varphi)$,

函数 $y = f(u)$ 将集合 D_f 映入 $f(D_f)$, 若 $\varphi(D_\varphi) \subseteq D_f$, 则得到了一个从 D_φ 到 $f(D_f)$ 的一个

新的函数, 也称为由函数 $u = \varphi(x)$ 和 $y = f(u)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, u 称为中间变量。

例 12 设 $u = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin u$, 求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 。

解: 由于 $\varphi(D_\varphi) = [0, +\infty) \subseteq D_f = (-\infty, +\infty)$ 可构成复合函数

$$f[\varphi(x)] = \sin \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty), \text{ 反之可否构成 } \varphi[f(x)], D_f = (-\infty, +\infty) \not\subseteq D_\varphi = [0, +\infty) \text{ 不可}$$

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 $f(D)$, 则对于任一 $y_0 \in f(D)$, 必有唯

一的 $x_0 \in D$ 使 $f(x_0) = y_0$, 从而确定了一个新的函数, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数,

记作

$$x = f^{-1}(y)$$

它的定义域是 $f(D)$, 值域是 D 。

注意: $y = f(x)$ 是单值对应的, 但其反对应关系不一定是单值的, 从而不一定能构成单值函数。

如： $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty), y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ ，函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域与值域是互换的，因而在 xOy 面上图形相同，习惯上用 $y = f^{-1}(x)$ 表示 $y = f(x)$ 的反函数，若点 $P(a, b)$ 在 $y = f(x)$ 的图形上，则 $Q(b, a)$ 就在其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形上，反之亦然。而 $P(a, b)$ 与 $Q(b, a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的，从而 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

五、基本初等函数

常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数。

1. 见教材即可

注意：对这些函数的定义式、定义域、值域、图形及相关的性质要了如指掌。

六、初等函数

定义 5 由基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

注意：一般地、分段函数不是初等函数 但： $y = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ 是初等函数

我们所讨论的函数一般都是初等函数，如：

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, y = \ln(\sin 2x), y = \frac{\arcsin x}{x + e^x}, y = x^x = e^{x \ln x} \text{ 等}$$

双曲函数：见教材

反双曲函数：见教材

小结：抽象地讲，一元函数 $y = f(x)$ 就是讨论两个变量 x 与 y 之间的一种动态关系，不过要求 x 与 y 的对应关系是单值的，与其相关的有界性、单调性、奇偶性、周期性都会在这一动态过程中得到体现。推而广之，世界上的万事万物如果可以量化的话，不都可看成以时间为自变量的函数吗？因为它们都是随时间的变化而变化的。

第二讲 极限（一）

教学目的和要求：深刻理解数列极限的定义，掌握数列极限的性质，深刻理解 x 无限增大时函数极限的定义。

知识点：数列极限的定义，数列极限的性质， x 无限增大时函数极限的定义。

重点：两个定义及数列极限的性质

难点： x 无限增大时函数极限的定义

教学方式：多媒体，讲授

教学思路：通过数列的实例的变化趋势引入数列极限的定义，着重解释如何用精确的数学语言来表达对“无限增大”，“无限接近”这些直观的描述，再由数列极限的定义推广到 x

无限增大时函数的极限

教学过程：

一、数列极限的概念

以自然数为自变量的函数 $x_n = f(n)$ 的函数值按自然数的顺序排列起来，就构成一个数列。

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ，简记为 $\{x_n\}$ ， x_n 为通项。

例如 1) $\{n\}: 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

2) $\{\frac{1}{n}\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

3) $\{\frac{n}{n+1}\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

4) $\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}: 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$

5) $\{(-1)^{n-1}\}: 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$

将这些数列的若干项表示在数轴上，当 $n \rightarrow +\infty$ 时，观察它们的变化规律，会发现 $\{n\}$ 无限增大， $\{\frac{1}{n}\}$ 无限接近于 0， $\{\frac{n}{n+1}\}$ 、 $\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$ 无限接近于 1， $\{(-1)^{n-1}\}$ 变化趋势不确定。

1. $\{n\}$

2. $\{\frac{1}{n}\}$

3. $\{\frac{n}{n+1}\}$

4. $\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$

如果当 n 无限增大时， x_n 无限接近某个确定的常数 a ，则称 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，记为：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$$

以 (3) 为例，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\{\frac{n+1}{n}\}$ 的各项无限接近于 1，也就是说，随着 n 的增大，

数列各项 $\frac{n+1}{n}$ 与 1 之差的绝对值 $|\frac{n+1}{n} - 1|$ (即点 $\frac{n+1}{n}$ 与 1 的距离) 就可以越来越小，任意

小，要多小有多小，可以小于任意给定的正数 ε 。就是说，对于任意给定的正数 ε ，不论它

有多么小，只要 n 足够大，都可以使 $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$ ，换句话说，只要存在正整数 N ，对于 $n > N$

的所有项都满足不等式 $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$ 就行了。

如：取 $\varepsilon = 0.01$ ，要使 $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < 0.01$ ，即 $\left| \frac{1}{n} \right| < 0.01$ ，得 $n > 100$ ，取 $N = 100$ ，当 $n > N$

时，就一定有 $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < 0.01$ 。也就是说该数列从第 101 项开始，后面所有的各项与 1 的距离都小于 0.01。再取 $\varepsilon = 0.001$ ，||||

定义 1 设有数列 $\{x_n\}$ ，若存在一个常数 a ，对于任意给定的正数 ε （不论它多么小），总存在正整数 N ，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并称 a 为 $\{x_n\}$ 的极限记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 。

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，或 $\{x_n\}$ 为收敛数列，否则称数列发散。

上述定义用逻辑符号表述为： $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ ，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限。

注意：定义中，正数 ε 是任意给定的可以充分小，它刻画了 x_n 接近于 a 的程度，正整数 N 与 ε 有关，用 $n > N$ 刻画 n 足够大，它是保证 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立的条件，对于一个给定的 $\varepsilon > 0$ ， N 不是唯一的。

$\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何意义：对于数轴上的点 a 的任意给定的 ε 邻域 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ，总存在自然数 N ，使得点列 $\{x_n\}$ 从第 $N+1$ 项起所有的点： $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ ，都落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之内，而在此邻域之外至多只有 $\{x_n\}$ 的有限项 $x_1, x_2, \dots, x_N$ ，因此可知，数列的收敛性与它的前有限项无关。

例 1 用数列极限的定义证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1$

证明：[分析] 利用 $\varepsilon - N$ 定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 关键是对 $\forall \varepsilon > 0$ ，视 n 为未知数，通过 $|x_n - a| < \varepsilon$ 不易解出 n ，可设法将 $|x_n - a|$ 适当放大为 $|x_n - a| < \varphi(n)$ ，然后由 $\varphi(n) < \varepsilon$ ，解

出 $n > g(\varepsilon)$ ，再取 $N = [g(\varepsilon)]$ ，因 $|x_n - a| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$ ，要使 $|x_n - a| < \varepsilon$ ，即要

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ 或 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ，所以，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ ，则当 $n > N$ 时，有：

$$\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} = 1。$$

例 2 用数列极限的定义证明, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$

证明：因 $|x_n - a| = \left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| -\frac{5}{2(2n+1)} \right| = \frac{5}{2(2n+1)}$ ，而 $\frac{5}{2(2n+1)} < \frac{5}{n}$ 。

所以，要使 $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ ，只要 $\frac{5}{n} < \varepsilon$ ，即 $n > \frac{5}{\varepsilon}$ ，于是，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N = \left[\frac{5}{\varepsilon} \right]$

当 $n > N$ 时，恒有 $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ 成立。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}。$$

例 3 用“ $\varepsilon - N$ ”语言证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{2n} = \frac{1}{2}$

证明：因 $|x_n - a| = \left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{2n} - \frac{1}{2} \right|$

$$= \left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{2n} \right| = \frac{a^2}{2n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)}$$

而 $\sqrt{n^2 + a^2} \geq \sqrt{n^2} = n$, $\sqrt{n^2 + a^2} + n \geq 2n$

于是 $\frac{a^2}{2n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} \leq \frac{a^2}{4n^2}$ ，要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ，只要 $\frac{a^2}{4n^2} < \varepsilon$ ，即 $n > \frac{|a|}{2\sqrt{\varepsilon}}$

所以，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N = \left[\frac{|a|}{2\sqrt{\varepsilon}} \right]$ ，当 $n > N$ 时，恒有 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ 成立。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{2n} = \frac{1}{2}$$

例 4 用“ $\varepsilon - N$ ”语言证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)

证明：当 $q = 0$ 时，结论显然成立。

现设 $0 < |q| < 1$ ，因 $|x_n - a| = |q^n - 0| = |q^n|$ ，要使 $|q^n| < \varepsilon$ ，取对数得： $n \lg |q| < \lg \varepsilon$

即 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ (不妨设 $0 < \varepsilon < 1$)。

所以， $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right]$ ，当 $n > N$ 时，恒有 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 。 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

二、数列极限的性质

定理 1 （极限的唯一性） ， 收敛数列的极限是唯一的

证明： 用反证法，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ，且 $a < b$ ，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a) > 0$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 知，存在正整数 N_1 ，当 $n > N_1$ 时

有 $|x_n - a| < \frac{1}{2}(b-a)$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ 知，存在正整数 N_2 ，当 $n > N_2$ 时

有 $|x_n - b| < \frac{1}{2}(b-a)$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，当 $n > N$ 时，上两不等式都成立

于是有 $b - a = |b - x_n + x_n - a|$ 。

$$\leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}(b-a) = b-a$$

矛盾，假设不成立，定理成立。

设数列 $\{x_n\}$ ，若 $\exists L > 0$ ，使得当 $n \in \mathbb{N}$ 恒有 $x_n \leq L$ ，则称 $\{x_n\}$ 有上界 L 。类似可定义 $\{x_n\}$

有下界。若 $\{x_n\}$ 既有上界，也有下界，则称 $\{x_n\}$ 是有界的，否则称 $\{x_n\}$ 无界。

定理 2 （收敛数列的有界性） ， 如果数列收敛，则数列必有界。

证明：设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则对于 $\varepsilon = 1$ ，存在正整数 N ，当 $n > N$ 时，

有 $|x_n - a| < 1$ 从而

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $m = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$ ，当 $n \in \mathbb{N}$ 时都有 $|x_n| \leq m$

$\therefore$ 数列 $\{x_n\}$ 有界。

注意： 有界性是数列收敛的必要条件，不是充分条件，也就是说有界数列不一定收敛，

如数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ ，有界但不收敛，若数列 $\{x_n\}$ 无界，必发散，如数列 $\{n \sin n\pi\}$ 无界，因而发散。

子数列的概念： 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列（子列）。

如 $\{x_n\}$ 中取出 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots (n_k \geq k)$ 。

定理 3 （收敛数列与子数列间的关系） ， 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a 。

证明：设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列，

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 均对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时

恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立。

取 $K=N$, 则当 $R > K$ 时, $n_R > n_K = n_N \geq N$

于是 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ 成立

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ 。

注意：如果子数列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛, 但原数列 $\{x_n\}$ 不一定收敛, 如 $\{(-1)^{n+1}\}$

思考题：猎狗的奔跑速度为 10m/s , 兔子的奔跑速度为 5m/s , 猎狗沿直线追赶兔子, 兔子提前一秒钟开始跑, 如图, 当兔子跑到 B 点时, 狗追到 A 点, 当兔子跑到 C 点时, 猎狗追到 B 点, 这样追下去, 似乎猎狗永远也追不到兔子, 为何?

三、自变量 x 无限增大时函数的极限

x 无限增大包括三种情况： $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$ 。

如果在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中, 函数值 $f(x)$ 无限地接近于确定的常数 A , 则 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。

定义 2 设 $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, 其中 $D(f) \supset (-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, 若

存在常数 $A \in \mathbb{R}$, 满足关系:

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

那么称 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

这时, 我们说, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 极限存在。

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 定义中的 $|x| > X$ 改为 $x > X$ 就可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 定义中 $|x| > X$ 改为 $x < -X$ 就可得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义

定义的几何意义: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 总能在 x 轴上找到一点 X , 使得函数的图形 $G(f) = \{(x, y) | y = f(x)\}$ 在直线 $x = X$ 右边的部分与直线 $x = -X$ 左

边的部分位于平面带形 $(X, +\infty) \times (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \cup (-\infty, -X) \times (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内

定理 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

证明: 必要性 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 由定义可知:

对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists X$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即当 $x > X (X > 0)$ 或 $x < -X$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

充分性，设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

对于 $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists X_1$ ，当 $x > X_1$ 时， $|f(x) - A| < \varepsilon_1$

对于 $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists X_2$ ，当 $x < -X_2$ 时， $|f(x) - A| < \varepsilon_2$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ， $X = \max\{X_1, X_2\}$ ，当 $|x| > X$ 时

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

例 5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2}$

证明：因 $\left| \frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2|2x+1|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2|x|-1}$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，只要 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2|x|-1} < \varepsilon$ ，即 $|x| > \frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}$

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $X = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}$ ，当 $|x| > X$ 时，就有 $\left| \frac{3x+1}{2x+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ 成立

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2}$

小结：数列的极限实际上是一元函数当自变量无限增大时极限的一种特殊情形，数列极限是自变量 n “离散地”取正整数无限增大时，函数值 $f(n) = x_n$ 的变化趋势。而一元函数当自变量无限增大时的极限是自变量 x “连续地”取实数无限增大时，函数值 $f(x) = y$ 的变化趋势，一个是“离散变量”，一个是“连续变量”。

第三讲 极限（二）

教学目的和要求：深刻理解函数极限的定义，掌握用定义证明函数极限的方法，熟悉函数极限的性质。

知识点： $\varepsilon - \delta$ 定义，函数极限的性质

重点： $\varepsilon - \delta$ 定义

难点： $\varepsilon - \delta$ 定义，用定义证明函数的极限

教学方式：多媒体，讲授

教学思路：利用函数极限的几何意义，详细、形象、深刻地讲解 $\varepsilon - \delta$ 定义，适当地增加用定义证明函数极限的例题，让学生熟练地掌握用定义证明极限的方法。

教学过程：

一、自变量趋于有限值时函数的极限

x 趋于 x_0 有三种情况： x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 ，即为 $x \rightarrow x_0^+$ ； x 从左侧趋于 x_0 ，记为 $x \rightarrow x_0^-$ ；

x 从左、右趋于 x_0 ，记作 $x \rightarrow x_0$ 。

如果在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A ，那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。

在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中， $f(x)$ 无限接近于 A ，就是 $|f(x) - A|$ 能任意小，要多小有多小，可小于任意给定的正数 ε ，即 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，而 $f(x)$ 无限接近 A 是在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中实现的，所以对于任意给定的正数 ε ，只要充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 即可。而充分接近 x_0 的 x 可表示为 $0 < |x - x_0| < \delta$ ，其中 δ 是某个正数。适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的全体 x ，就是 x_0 的去心 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$ ， δ 则体现了 x 与 x_0 的接近程度。

定义 1 设 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数，若存在一个常 $A \in \mathbb{R}$ ，满足关系：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

此时，也称当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 存在极限。

注意： $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限只与 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $U(x_0)$ 的值有关，与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义或 $f(x)$ 在 x_0 处的值的大小无关。因为极限是考虑 $x \rightarrow x_0$ 时，函数的变化趋势，与 $f(x)$ 在 x_0 处的状态无关。

几何意义：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，总能找到一个 $\delta > 0$ ，使得函数 f 的图形

$$G(f) = \{(x, y) | y = f(x), x \in U(x_0)\}$$

在宽为 2δ 的竖直带形内的部分全落在长方形 $(x - \delta, x_0 + \delta) \times (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内。

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ (C 为常数)

证明：因 $|f(x) - A| = |C - C| = 0$ ，对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，可任取一正数 δ （此处 δ 与 ε 无关），当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，能使不等式 $|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ 成立。 $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} C = C$

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

证明：因 $|f(x) - A| = |x - x_0|$ 要使 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$

对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \varepsilon$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有不等式 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$ 成立 $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ 。

证明：因 $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2|$ ，要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，即要 $|x - 2| < \varepsilon$

对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，即 $\delta = \varepsilon$ ，当 $0 < |x - 2| < \varepsilon$ 时，就有不等式 $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ 成立

$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ 。

分析：用 $\varepsilon - \delta$ 定义验证 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的关键是对于任给 $\varepsilon > 0$ ，在不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$

中视 $|x - x_0|$ 为未知数，从 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 中解出 $|x - x_0| < g(\varepsilon)$ ，取 $\delta = g(\varepsilon)$ 即可。如从不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 中不易解出 $|x - x_0| < g(\varepsilon)$ 可设法将 $|f(x) - A|$ 适当放大为 $|f(x) - A| \leq \varphi(x) < \varepsilon$ ，再从 $\varphi(x) < \varepsilon$ 中解出 $|x - x_0| < g(\varepsilon)$ ，再取 $\delta = g(\varepsilon)$ 即可。

例 4 证明：当 $x_0 > 0$ 时， $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ 。

证明：因 $|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0|$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 只要 $\frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0| < \varepsilon$ 或 $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \varepsilon$ ，且 $x \geq 0$ ，而 $x \geq 0$ 可用

$|x - x_0| \leq x_0$ 得证。

对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，即 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0} \varepsilon\}$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，不等式： $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$ 成

立, $\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

例 5 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$

证明: 因 $|f(x) - A| = \left| \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{|x-2|}{4|x+2|}$, 而 $x \rightarrow 2$, 可限定 $|x-2| < 1$, 则 $|x+2| > 3$,

于是得到放大的不等式

$$|f(x) - A| = \frac{|x-2|}{4|x+2|} < \frac{|x-2|}{12}$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $\frac{|x-2|}{12} < \varepsilon$, 即 $|x-2| < 12\varepsilon$, 于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取

$\delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$ 。

例 6 证明 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{3+x} = -\frac{1}{2}$

证明: 因 $|f(x) - A| = \left| \frac{2x+1}{3+x} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{5|x+1|}{2|x+3|}$, 而 $x \rightarrow -1$, 可限定 $|x - (-1)| < 1$, 即

$-2 < x < 0$, 则 $|x+3| > 1$, 于是得到放大的不等式:

$$|f(x) - A| = \frac{5|x+1|}{2|x+3|} < \frac{5}{2}|x+1|$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $\frac{5}{2}|x+1| < \varepsilon$, 即 $|x+1| < \frac{2\varepsilon}{5}$ 。

于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \frac{2}{5}\varepsilon\}$, 当 $0 < |x - (-1)| < \delta$ 时

就有 $\left| \frac{2x+1}{x+3} \right| = -\frac{1}{2}$, $\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+3} = -\frac{1}{2}$ 。

例 7 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$ 。

证明: 因 $\left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x^2 - x - 1}{2(x+1)} \right| \leq \frac{|2x||x-1| + |x-1|}{2|x+1|}$, 而 $x \rightarrow 1$, 可限定 $0 < |x-1| < \frac{1}{3}$,

则 $x < \frac{4}{3}$, $\frac{1}{2|x+1|} < \frac{3}{10}$ (因 $|x+1| > 2 - |x-1| > 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$)

于是得到放大的不等式

$$\left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{2|x|+1}{2|x+1|} |x-1| < \frac{11}{10} |x-1|$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $\frac{11}{10}|x-1| < \varepsilon$, 即 $|x-1| < \frac{10}{11}\varepsilon$, 于是对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{10}{11}\varepsilon\right\}, \text{ 当 } 0 < |x-1| < \delta \text{ 时, 就有 } \left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \text{ 成立, } \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

类似可以定义 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ 时函数的极限:

设函数 $f: (x_0 - \alpha, x_0) \rightarrow \mathbb{R} (\alpha > 0 \text{ 常数})$, 若存在数 $A \in \mathbb{R}$, 满足关系:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得当 } x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的左极限, 记作

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$$

同样可定义 f 当 $x \rightarrow x_0$ 的右极限, 记作

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$$

$$\text{定理 1 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

注意: $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件是 $f(x)$ 的左、右极限存在并且相等, 如

果左、右极限有一个不存在, 或都存在但不相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在。

$$\text{例 8 设 } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x & x > 1 \end{cases}, \text{ 证明 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 不存在。}$$

$$\text{证明: 因为 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 不存在。}$$

思考题:

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x & x > 1 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 是否存在? 与 } f(1) \text{ 是否有关系?}$$

在函数极限不存在的情况下, 有一种比较特别:

设 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是任一函数, 若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$\text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x)| > M$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限为无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } f(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow x_0)$$

类似地, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ 等。

二、函数极限的性质：

定理 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一。

证明：依照数列极限唯一性的证明方法。

定理 3 (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\exists M > 0$ 与 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in U(x_0, \delta)$ 都有

$$|f(x)| \leq M。$$

证明：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 由极限定义, 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$

当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$

从而, $|f(x)| = |f(x) - A + A| = |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M。$

定理 4 (局部保界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)。

证明：设 $A > 0$, 取正数 $\varepsilon \leq A$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义, 对于此 ε , $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 即 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ 成立。

故 $f(x) > A - \varepsilon \geq 0$

类似可证明 $A < 0$ 的情形。

定理 5 (局部保序性) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 那么 $A \geq B$ 。

证明：反证法, 设 $B > A$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$

则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{1}{2}(B - A) \text{ 有 } f(x) < \frac{1}{2}(B + A)$$

$$|g(x) - B| < \frac{1}{2}(B - A) \text{ 有 } g(x) > \frac{1}{2}(B + A) \text{ 矛盾。}$$

小结：极限的作用就是描述因变量 y 随自变量 x 在一定的变化过程中的终极状态（或变化趋势），它是分析数学中最基本的概念之一，是研究若干数学问题最基本的方法之一，极限概念的理解对后面学习函数的连续性、导数、微分、积分都是至关重要的。

第四讲 极限的运算法则

教学目的和要求：熟练掌握极限的运算法则，以及极限存在的两个准则，进一步熟练用定义证明极限存在的方法。

知识点：函数及数列极限的运算法则，极限存在的两个准则。

重点：函数极限的运算法则，极限存在的两个准则。

难点：极限的运算。

教学方式：多媒体、讲授

教学思路：通过对极限四则运算法则的证明进一步熟悉用“ $\varepsilon - \delta$ 定义”证明极限存在，通过一些典型例题的计算尽可能多地掌握函数极限的计算方法以及两个准则的运用。

教学过程：

定理 1 （四则运算法则）设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ，则

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

此定理对于 $x \rightarrow \infty$ 等情形也成立。

证明：2) 因

$$\begin{aligned} & |f(x) \cdot g(x) - AB| \\ &= |f(x) \cdot g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| \\ &\leq |g(x)| |f(x) - A| + |A| |g(x) - B| \end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，对于正数 $\frac{\varepsilon}{2M}$ ($M > 0$)，存在 δ_1 ，当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时，

$$\text{有 } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

又 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ，对于正数 M ，及 $\frac{\varepsilon}{2|A|}$ ，存在 δ_2 ，当 $x \in U(x_0, \delta_2)$ 时

$$\text{有 } |g(x)| \leq M \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}。$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 上述三个不等式同时成立

$$\therefore |f(x)g(x) - AB| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon$$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = AB$ 。

3) 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$ 对于正数 $\frac{|B|}{2}$, 存在 $U(x_0, \delta)$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}, \therefore |g(x)| = |g(x) - B + B| \geq |B| - |g(x) - B| > \frac{|B|}{2}$$

即 $\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|B|}$, $\frac{1}{g(x)}$ 在 $U(x_0, \delta)$ 内有界。

设 $\left| \frac{1}{g(x)} \right| < M$, 对于正数 $\frac{|B|}{M} \varepsilon$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{M} \varepsilon, \text{ 从而 } \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| |g(x)|} < \frac{M}{|B|} \cdot \frac{|B|}{M} \varepsilon = \varepsilon$$

再由 (2) 可知, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{A}{B}$

定理 2 (复合运算法则) 设函数 $\mu = g(x)$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在且等于 μ_0 , 又

$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = A$, 则复合函数 $f[g(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限也存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = A。$$

证明: 因为 $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = A$, 所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \text{ 使得当 } \mu \in U(\mu_0, \eta) \text{ 时, 恒有 } |f(\mu) - A| < \varepsilon$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu_0$, 故对于上式的 $\eta > 0$, $\exists \delta_1 > 0$

使得当 $x \in U(x_0, \delta_1)$ 时, 恒有 $|g(x) - \mu_0| < \eta$

设在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta_0)$ 内, $g(x) \neq \mu_0$, 取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时

恒有 $0 < |\mu - \mu_0| < \eta$, 即 $\mu \in U(\mu_0, \eta)$, 从而有 $|f[g(x)] - A| < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu)。$$

定理表明: 求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 可通过变量代换 $\mu = g(x)$, 化为求 $\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu)$ 的极限问题。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} (3x) - \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x + 2}$

解：原式 $= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + x + 2)} = \frac{3}{4}$

一般地对于多项式 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ 。

有理函数： $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

有 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0)$

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = 0$ ，则不能用法则。

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 4}$

解：当 $x \rightarrow 1$ 时，分子、分母的极限为零，不能用运算法则，对这类极限通常是将函数式作适当变形，消去分子、分母中趋于零的因式后，再用运算法则。

原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+4} = -\frac{1}{5}$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$

解：(略)

以上两例中的极限式称为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式。

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + x + 1}{3x^3 + 2x^2 + 8}$

解：当 $x \rightarrow \infty$ 时，分子、分母的极限都是 ∞ ，不可用运算法则，以 x^3 除分子、分母就可以了。

原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3}} = \frac{2}{3}$ 。

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

解：(略)

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2}$ 。

此例中的极限式称为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式。

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 2} e^{x^2 - 2x + 3}$

解：由极限的复合运算法则，设 $\mu = x^2 - 2x + 3$

$\lim_{x \rightarrow 2} \mu = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} e^{x^2 - 2x + 3} = \lim_{\mu \rightarrow 3} e^{\mu} = e^3$

关于数列，也有类似的极限运算法则。

定理 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ ，则

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = AB$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

例 9 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ 。

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{2}$

极限的运算法则提供了求极限的方法，但前提是极限存在，而且需要利用一些已知极限的结果。

极限存在的两个准则：

准则 I（夹逼原理）如果数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

1) $y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

证明：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ，由数列极限的定义有

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N_1 \text{ 时, 有 } |y_n - a| < \varepsilon$

当 $n > N_2$ 时，有 $|z_n - a| < \varepsilon$ ，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则当 $n > N$ 时，有

$|y_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$ 同时成立。又 $y_n \leq x_n \leq z_n$

$\therefore$ 当 $n > N$ 时, 有 $a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon$, 即 $|x_n - a| < \varepsilon$ 。

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

上述准则对函数也成立。

准则 I' (夹逼原理) 如果

1) 当 $x \in U(x_0, r)$ 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 成立

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$

那么: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于 A 。

准则 II (单调有界准则) 单调增加 (减少) 有上 (下) 界的数列必定收敛。

单调增加数列 $\{x_n\}$: $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$

单调减少数列 $\{x_n\}$: $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$

单调增加、单调减少的数列统称为单调数列。

我们知道: 收敛数列一定有界, 但有界数列不一定收敛。

准则 II 表明: 如果数列不仅有界, 而且是单调的, 则数列的极限存在, 也就是说数列一定收敛。

例 10 计算下列极限

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right]$$

$$\text{解: 1) 因 } (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{而 } 1 < \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 < 3$$

$$\text{有 } 3^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right]^{\frac{1}{n}} < 3^{\frac{1}{n}} \cdot 3^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{\frac{1}{n}} \cdot 1) = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 3$$

$$\text{由夹逼原理 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$$

$$2) \text{ 因 } \frac{n+1}{4n^2} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n^2} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \left(\dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) \right] = 0.$$

例 11 证明数列 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ 收敛，并求其极限。

证明：先证明其单调性（数学归纳法）

当 $n=1$ 时，有 $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$ ，

设当 $n=k$ 时，有 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} > x_k$ ，

则 $\sqrt{2 + x_{k+1}} > \sqrt{2 + x_k}$ ，

即当 $n=k+1$ 时，有 $x_{k+2} > x_{k+1}$ 。

所以，对一切自然数 n ， $x_{n+1} > x_n$ ，故数列是单调增加的，再证其有界（数学归纳法）

当 $n=1$ 时， $x_1 = \sqrt{2} < 2$ ，设 $x_k < 2$ ，则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$

所以，对一切自然数 n ，都有 $x_n < 2$ ，故数列有上界 2。

根据单调有界准则， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，由 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ， $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，两边求极限得 $a^2 = 2 + a$

解之得： $a=2$ ， $a=-1$ 显然 $x_n > 0$ ， a 不能为负。 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

思考题：

$$1) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

小结：直接用运算法则和准则求极限一般较容易，难点在于对函数式的变形，为了达到好的学习效果，务必要有针对性地进行适量的练习，通过练习归纳、总结行之有效的方法，熟练法则、准则的运用。

第五讲 两个重要极限

教学目的和要求：深刻理解两个重要极限的意义，能熟练运用两个重要极限的结果，求

解与之相关的极限问题。

知识点：两个重要极限。

重点：两个重要极限。

难点： $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 的证明。

教学方式：多媒体、讲授。

教学思路：通过两个重要极限的证明，加深对它们的理解。在与之相关的例题与练习之中，进一步熟练运算法则、准则的运用，解题力争做到简洁、明了。

教学过程：

一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

证明：设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，作单位圆，由图可知：

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOD$ 的面积

所以： $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$ 。即： $\sin x < x < \tan x$ ，除 $\sin x$ 就有 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

或 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 。以 $-x$ 代 x , $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ 都不变，上述不等式在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内的一切 x 也是成立的。

从而有： $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot (\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}$

由夹逼原理得： $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{\sin x}{x}) = 0$

因而由上面的证明还可知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ ，即 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

由此结果，可得：圆周上任一弦与其对应弧的长度之比当弧长趋于 0 时的极限为 1

事实上，弧 $AB = x$ 弦 $\overline{AB} = 2 \sin \frac{x}{2}$ 。

$\therefore \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{AB} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$ 。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2$

$$\stackrel{\text{令 } \mu = \frac{x}{2}}{=} \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \mu}{\mu} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{1}{x}$

解：原式 $\stackrel{\text{令 } \arcsin \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1。$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

解：原式 $\stackrel{\text{令 } \mu = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin \mu}{\mu} = 1$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

解：原式 $\stackrel{\text{令 } t = x - \frac{\pi}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$

例 6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $x_n = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

解：因 $x_n = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n} \sin \frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}$

$$= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^n}} = \cdots = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}。$$

α 不随 n 变化, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0。$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}。$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \frac{x^2}{\pi^2}}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2 \sin(\pi - x)}{(\pi + x)(\pi - x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2}{\pi + x} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = \frac{\pi}{2}。$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{x}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos x} = 0$ 。

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$ 。

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin^2 \frac{\beta x}{2} - \sin^2 \frac{\alpha x}{2})}{x^2}$ 。

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{\beta x}{2}}{\frac{\beta x}{2}} \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha x}{2}} \right)^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

或先将 $\cos \alpha x - \cos \beta x$ 化积，再变形。

此类极限问题关键是要将极限式化为 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 的形式，再用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的结果。

二、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

先考虑 x 取正整数趋于 $+\infty$ 的情形，设 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ，可以证明 $\{x_n\}$ 是单调增加，并且有上界。由二项公式，有

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{2}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

比较 x_n 与 x_{n+1} 的展开式，每一项均为正数，除前两项外， x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对

应项，且 x_{n+1} 还多一项，于是 $x_n < x_{n+1}$ ，即数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的。

又

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 有上界，根据单调有界准则， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，设极限为 e ，从而得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e 为无理数， $\{x_n\}$ 的每一项是有理数，而极限是无理数。

再考虑 x 为实数的情形：

先证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

设 $n = [x]$ ，则 $n \leq x < n+1$ ，从而有

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $n \rightarrow +\infty$ ，并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

由夹逼原理可得： $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

再证 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ，令 $t = -x$ ，当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $t \rightarrow +\infty$ ，从而有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \right] = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

所以： $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

利用极限的复合运算：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$ 。

解：令 $t = -x$ ，则当 $x \rightarrow \infty$ 时， $t \rightarrow \infty$ ，于是

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{t})^t} = \frac{1}{e}。$$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+1}{2x-3})^x$ 。

$$\text{解：} \because \frac{2x+1}{2x-3} = 1 + \frac{4}{2x-3},$$

$$\text{令 } \frac{1}{t} = \frac{4}{2x-3}, \text{ 则 } x = 2t + \frac{3}{2}, \text{ 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } t \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^{2t + \frac{3}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{t})^t \right]^2 \cdot (1 + \frac{1}{t})^{\frac{3}{2}} = e^2。$$

例12 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ 。

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - 2x^2)^{\frac{1}{2x^2}} \right]^{-2} = e^{-2}$$

例 13 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}$ 。

$$\text{解：令 } e^{\sqrt{x}} - 1 = t, \sqrt{x} = \ln(1+t)$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } t \rightarrow 0^+, \therefore \text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1$$

例 14 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [1 + (\tan x - 1)]^{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [1 + (\tan x - 1)]^{\frac{1}{\tan x - 1} \cdot \frac{-2 \tan x}{\tan x + 1}} \\ &= e^{-1} \quad (\text{因 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \tan x}{\tan x + 1} = -1) \end{aligned}$$

此类极限问题关键是将极限式化成 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}$ 或 $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[1 + f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}$ 的形式，

再用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的结果。

小结：两个重要极限在实践中有很重要的应用，它们的证明应用了夹逼原理和单调有界准则，证明的方法非常简练，值得借鉴，对两个重要极限的认识不能仅仅停留在它们的结果上。

第六讲 函数的连续性

教学目的和要求：深刻理解函数连续性的概念，熟悉间断点的分类、连续函数的运算及性质。

知识点：函数连续的定义，间断点的定义及分类，连续函数的运算及闭区间上连续函数的性质。

重点：函数连续的概念，间断点及其分类。

难点：间断点及其分类。

教学方式：多媒体、讲授。

教学思路：结合极限的定义，深刻、透彻地讲解函数连续的定义，利用分段函数解释函数的间断点及其分类，通过函数的图形直观地解释连续函数的性质。

一、连续函数的概念

定义 1 设有函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 f 在 x_0 处连续。

用 $\varepsilon - \delta$ 语言表达： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得当 $x \in U(x_0)$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

则称函数 f 在 x_0 处连续。

注意：在此定义中要求函数 f 在 x_0 处有定义，与极限定义不同。该函数 $y = f(x)$ 在 x_0

的某邻域内有定义，当自变量从 x_0 变到 x 时，对应的函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$ ，称 $\Delta x = x - x_0$

为自变量的增量， $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数的增量。

定义 1' 设函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0$$

则称函数 f 在 x_0 处连续。

此定义表明当自变量在某点的增量充分接近于零，对应的函数的增量可以任意接近于零，则函数就在该点连续。

类似于左极限、右极限，还可以定义函数在 x_0 处的左连续、右连续，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \right)$$

则称 f 在 x_0 处左连续（右连续），不难证明：

函数 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f$ 在 x_0 处既左连续又右连续。

若 f 在开区间 (a, b) 内每一点连续，则称它在开区间 (a, b) 内连续；若 f 在 (a, b) 内连续，并且在左端点右连续，在右端点左连续，则称它在闭区间 $[a, b]$ 上连续，半开半闭区间上的连续性可类似定义，若 f 在定义区间 I 上连续，则称它是该区间上的连续函数。

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。

如： $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 1$ 。

例 1 证明 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

证明：任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ ，由和差化积公式

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

所以，对于任给 $\varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \varepsilon$ ，当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ 。即 $\sin x$ 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性可知 $\sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。

类似地，可以证明 $y = \cos x$ 也是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。

例 2 证明 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

证明：先证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1 (a > 1)$ ；

对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，为使 $|a^x - 1| = a^x - 1 < \varepsilon$ ，只要 $x < \log a(1 + \varepsilon)$ ，取 $\delta = \log a(1 + \varepsilon)$ ，

则当 $0 < x < \delta$ 时，就有 $|a^x - 1| < \varepsilon$ 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$ 。

再证 $\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = 1 (a > 1)$ ；

由于 $x \rightarrow 0^-$ 等价于 $-x \rightarrow 0^+$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{-x}} = 1$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1 (a > 1)$$

$$\text{类似可证明 } \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 (0 < a < 1)$$

$$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty), \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0} \xrightarrow{\text{令 } x-x_0=t} a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} a^t = a^{x_0}$$

因此 a^x 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。

$$\text{例 3 证明 } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases} \text{ 在 } x=1 \text{ 处连续。}$$

$$\text{证明：因 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1。$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1), \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处连续。}$$

二、函数的间断点及其分类

由定义、函数 f 在 x_0 处连续当且仅当满足下列三个条件：

1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义。

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在且相等。

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

如果其中有一个条件不满足，即 f 有下列三种情形之一：

1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义。

2) $f(x)$ 虽在 x_0 处有定义，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在。

3) $f(x)$ 虽在 x_0 处有定义，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处

不连续。

使函数 $f(x)$ 不连续的点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点。

函数 $f(x)$ 的间断点分为两类：一类是左、右极限都存在的间断点，称为第一类间断点，

其余的称为第二类间断点。

$$\text{例 4 设 } f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \text{ 问 } x=2 \text{ 是否是间断点？第几类？}$$

解：显然 $f(x)$ 在 $x=2$ 处没有定义， $x=2$ 是间断点，而

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

∴ $x = 2$ 是第一类间断点。

补充定义： $f(2) = 4$ ，则函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处就连续了。

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & x = \frac{\pi}{2} \\ 2\pi & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 问 $x = \frac{\pi}{2}$ 是否为间断点？第几类？

解：因 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2\pi = 2\pi$ 而 $f(\frac{\pi}{2}) = 2$

∴ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \neq f(\frac{\pi}{2})$, $x = \frac{\pi}{2}$ 是第一类间断点。

补充定义： $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ，则函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处就连续了。

以上两例中的间断点称为可去间断点，其特点是：函数在该点处的左、右极限存在且相等，但函数在该点无定义或者虽有定义但极限值与该点的函数值不相等。重新定义函数在该点的值，可以使之成为连续点。

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ 问 $x = 0$ 是否为间断点，第几类？

解：因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$

左、右极限存在，但不相等，所以 $x = 0$ 是第一类间断点。

左、右极限存在但不相等的间断点称为跳跃间断点。

可去间断点和跳跃间断点都是第一类间断点。

例 7 $f(x) = \tan x$ ，问 $x = \frac{\pi}{2}$ 是否为间断点，第几类？

解：因 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处无定义，且 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ ，所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 是第二类间断点，也称

无穷间断点。

例 8 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ，在 $x = 0$ 处没有定义，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在，且当 $x \rightarrow 0$ 时，函数

值在 -1 与 1 之间变动无限多次。称此类间断点为振荡间断点（图见教材 P₄₃）。

无穷间断点与振荡间断点属于第二类间断点。

三、连续函数的运算及初等函数的连续性

由连续的定义及极限的运算法则可得连续函数的下列性质：

定理 1 设函数 $f, g: U(x_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续, 则:

- 1) $f(x) \pm g(x)$
- 2) $f(x) \cdot g(x)$
- 3) $f(x)/g(x)$ ($g(x_0) \neq 0$)

都在 x_0 处连续。

定理 2 设 $y = f[g(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 复合而成的函数, 若 g 在 x_0 处连续, f 在对应的 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则 $f[g(x)]$ 也在 x_0 处连续。

证明: 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 令 $u = g(x)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} u = u_0$

所以: $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] \xrightarrow{u=g(x)} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[g(x_0)]$

说明复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 处连续。

此定理表明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right]$$

也就是说, 在求连续函数的极限时, 极限符号与函数符号可以交换次序。

定理 3 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调增加 (或单调减少) 的连续函数, 则其反函数 f^{-1} 在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in [a, b]\}$ 上单调增加 (或单调减少) 且连续。

由 $\sin x, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性, 可知 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续。

由于 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续, 则 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也是单调增

加且连续, 反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连

续的。由于 a^x ($a > 0, a \neq 1$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调连续的, 则 $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$

内单调且连续。幂函数 $x^u = e^{u \ln x}$ ($u \in \mathbb{R}$) 可以看成是连续函数 $y = e^t$ 与 $t = u \ln x$ 的复合函

数, 所以它在 $(0, +\infty)$ 上连续。

综上所述得: 基本初等函数在其定义域内都连续。由初等函数的定义及基本初等函数的连续性, 可得:

定理 4 所有初等函数在其定义区间内都是连续的, 定义区间是包含在定义域内的区间。

如： $y = \sqrt{\sin^2 x - 1}$ 定义域是离散的点集 $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 不是区间，那么

$y = \sqrt{\sin^2 x - 1}$ 是不能谈连续的。

初等函数的连续性提供了求极限的一种方法。

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - 1)(\sqrt{1-x^2} + 1)}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{1-x^2} + 1)} = 0$

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$

解：令 $a^x - 1 = t$ ，则 $x = \log_a(1+t)$ ， $x \rightarrow 0$ 时， $t \rightarrow 0$

于是原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$ 。

四、闭区间上连续函数的性质

定理 5 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界。

定义 2 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$ ，如果有 $x_0 \in I$ ，使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (或 } f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（最小值）。

定理 6 （最大值和最小值定理）在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数一定能取得它的最大值和最小值，即至少存在两点 $\xi, \eta \in [a,b]$ ，使得

$$f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta) \quad x \in [a,b]$$

图：见教材 P₄₅ 图 2-8

注意：此定理中，函数 f 的定义域必须是闭区间，并且是连续的，否则结论不一定成立。举例说明之。

定理 7（零点定理）设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(a)f(b) < 0$ ，则至少存在一点

$\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$ 。

几何意义：如果闭区间上的连续曲线弧段的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点。图：见教材 P₄₆ 图 2-10。

定理 8 (介值定理) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \neq f(b)$, 则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数 c , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$ 。

证明：设 $F(x) = f(x) - c$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $F(a) = f(a) - c$, $F(b) = f(b) - c$, $F(a)F(b) < 0$ 。

由零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = c$ 。

几何意义：闭区间上的连续曲线弧 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = c$ 至少相交于一点。图：见教材 P₄₆ 图 2-11。

推论：设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 能取得介于它的最大值 M 与最小值 m 之间的任一值。

例 12 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一根。

证明：设 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 显然 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理, 至少有一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$

即： $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$

此等式说明 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上至少有一个根 ξ 。

例 13 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) < a$, $f(b) > b$, 证明在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \xi$ 。

证明：令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

且 $F(a) = f(a) - a < 0$, $F(b) = f(b) - b > 0$, 由介值定理, 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$f(\xi) - \xi = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$ 。

小结：函数的连续性描述函数的一种连绵不断变化的状态, 即自变量的微小变动只会引起函数值的微小变动的情况, 其图形是一条连续不间断的曲线。连续函数的性质可在其图形上得到直观的表现。

第七讲 无穷小与无穷大、无穷小的比较

教学目的和要求：深刻理解无穷小、无穷大的概念以及它们之间的关系，熟练运用无穷小的运算性质。熟悉无穷小的比较。

知识点：无穷小、无穷大的定义，无穷小的运算，无穷小与无穷大的关系，无穷小的比较。

重点：无穷小的运算性质，无穷小与无穷大的关系，无穷小的比较。

难点：等价无穷小的利用

教学方式：多媒体、讲授。

教学思路：通过具体的实例理解无穷小、无穷大的概念，无穷小与无穷大是函数在变化过程两种比较特别的变化趋势，要加强对“趋势”二字的解释。

教学过程：

一、无穷小与无穷大

定义 1（无穷小） 当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时，以零为极限的函数 $\alpha(x)$ 称为当 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时的无穷小量，简称无穷小。

注意：无穷小是一个变量，是在某个变化过程中绝对值越来越小的一个变量，不能把绝对值很小的常数当作无穷小，常数中只有零是无穷小。

如：当 $x \rightarrow 0$ 时， $x^2, \sin x, \ln(1+x), 2x$ 等都是无穷小量；当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}$ 等都是无穷小量，可结合函数的图形加以讲解。

无穷小与函数极限的关系：

定理 1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$ ，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小。

证明：必要性： 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$

令 $\alpha(x) = f(x) - A$ ，则 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小，

并且 $f(x) = A + \alpha(x)$

充分性：设 $f(x) = A + \alpha(x)$ ， $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小。

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [A + \alpha(x)] = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A$ 。

此定理对于 $x \rightarrow \infty$ 时的情形同样成立。

由极限的运算法则，可得到无穷小的运算性质。

定理 2 对于自变量相同变化趋势下的无穷小，有如下性质：

- 1) 有限个无穷小的和是无穷小。
- 2) 有限个无穷小的乘积是无穷小。

定理 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

证明：设函数 μ 在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有界，即 $\exists M > 0$ ，使当 $x \in U(x_0, \delta)$

时，恒有 $|\mu(x)| \leq M$ ，又设 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小，从而， $\forall x \in U(x_0, \delta)$

$$|\alpha(x) \cdot \mu(x)| \leq M |\alpha(x)|$$

$$\text{即 } -M |\alpha(x)| \leq \alpha(x) \mu(x) \leq M |\alpha(x)|$$

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \mu(x) = 0$

即 $\alpha(x) \cdot \mu(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小。

类似证明，若 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小， $\mu(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时有界，则 $\alpha(x) \cdot \mu(x)$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 。

解：当 $x \rightarrow 0$ 时， x^2 是无穷小， $\sin \frac{1}{x}$ 为有界函数，故 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小。

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

解：因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ， $\frac{1}{x}$ 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小，而 $|\sin x| \leq 1$ ，由定理 3 可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

注意：此例与第一个重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的区别。

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{|\sin x|}$

$$\text{解：原式} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\sin x} \right|$$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ ， $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{\sin x} \right| = 1$ ，从而 原式 = 0。

定义 2 (无穷大) 设 $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数，若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$)，则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的正无穷大 (负无穷大)，类似还可以定义当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大及正 (负) 无穷大。

注意：无穷大量是变量，是在某个变化过程中绝对值越来越大的变量。绝对值很大的数不是无穷大，两个无穷大的代数和不一定是无穷大，如：当 $x \rightarrow 2$ 时， $\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \rightarrow \frac{1}{2}$ ，无穷大与有界函数的乘积也不一定是无穷大，如当 $x \rightarrow \infty$ 时， $x \sin x$ 等。

在几何上，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ，则称直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线；若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ，则称直线 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

无穷小与无穷大之间的关系：

定理 4 若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大；若 $f(x)$ 是无穷大，则

$\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小。

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x}$

解：当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $e^x \rightarrow +\infty$ ， $\frac{1}{e^x} \rightarrow 0$ ，而 $|\sin x| \leq 1$ 。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x} = 0$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

解：当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ，于是，原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 。

定理 5 1) 有限个无穷大量的乘积是无穷大， 2) 无穷大与有界量之和是无穷大。

二、无穷小的比较

两个无穷小的商的极限会有不同的结果，例如，当 $x \rightarrow 0$ 时， $3x, x^2, \sin x, x \sin \frac{1}{x}$ 都是无穷小。

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}$ 不存在， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty$

不同的结果，反映了不同的无穷小趋近于零的速度各不相同。

定义 3 设 $\alpha(x), \beta(x)$ 是在同一自变量的变化过程中的无穷小, 而 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也是在这

个变化过程中的极限, 且 $\alpha(x) \neq 0$ 。

1) 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小, 或 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小,

用小 o 记作 $\beta(x) = o(\alpha(x))$ 。

2) 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C$, C 是一个非零常数, 则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小, 记作

$\beta(x) = O(\alpha(x))$, 特别地, $C=1$ 时, 称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小。记作 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ 。

3) 若 $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C$, C 是一个非零常数, $k>0$, 则称 $\beta(x)$ 是关于 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷

小。

例 6 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比较下列无穷小的阶。

1) $\beta(x) = \sin x, \alpha(x) = x$ 2) $\beta(x) = 1 - \cos x, \alpha(x) = \frac{1}{2}x^2$

3) $\beta(x) = \arcsin x, \alpha(x) = x$ 4) $\beta(x) = \ln(1+x), \alpha(x) = x$

解: 2) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$

所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小, 即 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 类似可得 (1)、

(3)、(4): 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ 。

例 7 设 $f(x) = \sin x - 2\sin 3x + \sin 5x$, $g(x) = Ax^n$, 求 A, n 使当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$

与 $g(x)$ 是等价无穷小。

解: 因 $f(x) = \sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = \sin x - 2(\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x) + 5\sin x - 4\sin^3 x$
 $= -2\sin 3x(1 - \cos 2x) = -4\sin^2 x \sin 3x$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin^2 x \sin 3x}{x^3} = -12$, 所以取 $A = -12$, $n = 3$, $g(x) = -12x^3$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\sin^2 x \sin 3x}{-12x^3} = 1$

故当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim g(x)$

例 8 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

证明: 令 $e^x - 1 = t$, 则 $x = \ln(1+t)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1$

$\therefore$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x$

例 9 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

证明: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1]} = 1$

$\therefore$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

定理 6 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小的充分必要条件是: $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$

因此 $\beta(x) - \alpha(x) = o(\alpha(x))$

证明: 必要性: 设 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ 则

$$\lim \frac{\beta(x) - \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim \left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 1 \right) = \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 1 = 0$$

因此 $\beta(x) - \alpha(x) = o(\alpha(x))$

即: $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$

充分性: 设 $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$ 则

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\alpha(x) + o(\alpha(x))}{\alpha(x)} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)} \right) = 1$$

因此 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

定理 7 设 $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, $\beta(x) \sim \beta'(x)$ 且 $\lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也存在, 且

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}.$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim \left[\frac{\beta(x) \cdot \beta'(x) \cdot \alpha'(x)}{\beta'(x) \alpha'(x) \cdot \alpha(x)} \right] \\ &= \lim \frac{\beta(x)}{\beta'(x)} \cdot \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} \cdot \lim \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)} \end{aligned}$$

此定理称为等价无穷小的替换定理。

$$\text{例 10 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin \frac{x}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{3}}$$

解：因为当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt{1+2x^2}-1 \sim \frac{1}{2} \cdot 2x^2 = x^2$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{\arcsin \frac{x}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}} = 6$$

$$\text{例 11 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

解：因为当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ ， $x \sin x \sim x^2$

$$\text{故 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 12 求 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\arcsin(2\sqrt{x-1})}$$

解：因为当 $x \rightarrow 1^+$ 时， $\sqrt{x-1} \rightarrow 0$

$$\ln(1+\sqrt{x-1}) \sim \sqrt{x-1} \quad \arcsin(2\sqrt{x-1}) \sim 2\sqrt{x-1}$$

$$\text{故 原式} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}$$

注意：等价替换只能对分子分母中的无穷小因子进行，而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3}$$

小结：无穷小，无穷大都是变量，是自变量的某个变化过程中，函数值的两种变化趋势，

对他们的认识一定要有动态的眼光。

第八讲 习题课

教学目的与要求： 加强对本部分内容全局性的认识， 加深对基本概念的认识和理解， 进一步熟练极限的运算， 间断点的判别。

知识点：函数，极限，连续

重点：极限，连续

难点：极限的运算

教学方式：多媒体，讲授，课堂练习

教学思路：用框图对本部分内容作一概述， 使学生对内容的条理更加明确， 列举一些综合性较强的例题，加强极限的运算，间断点的判别，以及对函数连续性的认识。

教学过程：

一、知识网络图

二、举例

$$\text{例 1 设 } f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ -e^x & x < 0 \end{cases}, \quad \varphi(x) = \ln x$$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域；

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗？

解：1) 因 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，值域是 $(-\infty, +\infty)$ ，而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，

$\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内，故 $f[\varphi(x)]$ 有意义，因而

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\varphi^2(x) & \varphi(x) \geq 0 \\ -e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\ln^2 x & x \geq 1 \\ -x & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

从上式看出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ 。

2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 0]$ ， $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，它们无公共部分，不能复

合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数。

例 2 试证函数 $f(x) = x + \sin x$ 没有周期。

证明：反证法 设 $f(x)$ 的周期为 T ，由 $f(x+T) = f(x)$ 有

$$x+T + \sin(x+T) = x + \sin x$$

即 $T + \sin(x+T) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$ 。

取 $x=0$ ，得 $T + \sin T = 0$ ，从而 $T = 0$ 矛盾。

例 3 设 $y = \frac{1}{2x} f(t-x)$ 且 $y|_{x=1} = \frac{t^2}{2} - t + 5$ 求 $f(x)$ 。

解：由已知，有 $\frac{t^2}{2} - t + 5 = \frac{1}{2} f(t-1)$ ， 即

$$f(t-1) = t^2 - 2t + 10 = (t-1)^2 + 9$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 9$$

例 4：判定函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性。

解： $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \ln \frac{1+x}{1-x} = -\frac{(1-e^x)}{e^x + 1} \ln \frac{1-x}{1+x} = f(x)$ ， $\therefore f(x)$ 是偶函数。

例 5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n}{3^n}$ 。

解：原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} [2 + 3 \cdot (-\frac{2}{3})^n] = 2$ 。

例 6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2})$ 。

解： 因为 $1 - \frac{1}{K^2} = \frac{K^2 - 1}{K^2} = \frac{K-1}{K} \cdot \frac{K+1}{K}$ ， $K = 1, 2, \cdots, n$ 。

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad & (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{(n-1)^2})(1 - \frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

故 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ 。

例 7 设 $x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{x_0}{1+x_0}$ ， $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$ 试证： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，并求此极限值。

解：由已知 $x_n > 1 (n=0,1,2,\dots)$ 且 $x_1 - x_0 = \frac{1}{2} > 0$ 即 $x_1 > x_0$

设 $x_n > x_n - 1$ 则

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{x_n}{1+x_n}\right) - \left(1 + \frac{x_n-1}{1+x_n-1}\right) = \frac{x_n - x_n + 1}{(1+x_n)(1+x_n-1)} > 0$$

所以 $\{x_n\}$ 是单调增加的，又

$$x_n = 1 + \frac{x_n - 1}{1+x_n-1} = 2 - \frac{1}{1+x_n-1} < 2$$

从而 $\{x_n\}$ 有上界，根据单调有界准则， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，则有

$$a = 1 + \frac{a}{1+a} \quad \text{即} \quad a^2 - a - 1 = 0$$

解得： $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，而 $a > 0$ ， $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

思考题：设 $x_1 > a > 0$ ，且 $x_{n+1} = \sqrt{ax_n}$ ，($n=1,2,\dots$)，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，并求此极限。

提示：用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少，且有下界。

例 8：求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{8\cos^2 x - 2\cos x - 1}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(4\cos x + 1)(2\cos x - 1)}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{4\cos x + 1}{\cos x + 1} = 2$ ，

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+2\cos^2 \frac{x}{2}} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2}\cos \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi^+} -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \circ$$

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, 原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ 不存在。}$$

$$\text{例 11 求 } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2}]} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{例 12 求 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} \quad (x_0 > 0)$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{x_0 \cdot \frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})^{\frac{1}{\frac{x - x_0}{x_0}}} = \frac{1}{x_0}$$

$$\text{例 13 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos 2x)}{x^4}$$

$$\text{解: 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \text{ 所以 } 1 - \cos[1 - \cos 2x] \sim \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)^2$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)^2}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{4x^2}{2}}{2x^4} \right)^2 = 2 \circ$$

$$\text{思考题: 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2} \circ$$

例 14 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$

解：当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$

$$\text{原式} = \arccos \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} \right) = \arccos \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x} \right) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

例 15. 讨论函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的连续性, 并判断间断点的类型。

解：显然 $f(x)$ 的间断点为 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 及 $x = n\pi$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内其余的点都连续。而当 $x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

故 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ 是第一类 (可去) 间断点。

当 $x \rightarrow n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $\tan x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow n\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{x}{\tan x} = \pm \infty$$

故 $x = n\pi$ 是第二类 (无穷) 间断点。

例 16. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ 的连续性。

解：当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = +\infty$$

$\therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类 (无穷) 间断点。

当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}} = 0$$

∴ $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类（跳跃）间断点。

于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ $(0, 1)$ $(1, +\infty)$ 上是连续的。

例 17. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的连续性，并判断间断点的类型。

$$\text{解, 若 } x \neq 0, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} -1 & 0 < |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ x^2 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{当 } x \rightarrow -1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$\text{当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

∴ $x = \pm 1, 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，其中 $x = 0$ 是可去间断点， $x = \pm 1$ 是跳跃间断点。

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$ 上连续。

思考题：求 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点，并指出类型。

提示： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ 。

小结：函数是研究变量间的关系，而极限是讨论变量的变化趋势，连续是讨论变量的变化状态，对这些概念的认识一定要用动态的方法，要有大局观。

第三章 导数与微分

第一讲 导数的概念

教学目的与要求：

- 1、掌握导数的定义，导数的极限表示的各种形式，导数的几何意义、物理意义。
- 2、知道可导与连续间的关系。

3、熟记 8 个简单初等函数的求导公式，并会应用。

知识点：导数的定义，导数的物理、几何意义，导数与连续的关系，8 个初等函数的求导公式。

重点：导数的定义，及它的几种极限表示式

难点：分段函数的可导问题

教学方式：讲授为主

教学思路：从引例出发引出导数概念，明确指出导数的几种极限形式，左、右导数的表示式，以加深对导数的概念的理解。例题以加深导数定义的题目为主，求导例题等为辅，导数应用题为辅。

教学过程：

一、导数的定义

引例 1：直线运动的速度

一汽车一天行车 8 小时，走了 240 公里，平均每小时走 30 公里，但这仅是平均速度，8 小时期间，有时速度超过 30 公里，但有时会小于 30 公里。

我们现在关心瞬时速度。

设物体作变速直线运动，已知位移随时间变化规律为 $S=S(t)$ ，当时间从 $t_0 \rightarrow t_0 + \Delta t$ ，物体在 Δt 时间内所经过的距离为：

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$$

但这段时间里平均速度为：

$$\bar{V} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

但当 Δt 很小时， t_0 时刻的瞬时速度应有：

$$V(t_0) \approx \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

且 Δt 越小近似程度越好，于是规定

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

引例 2：平面曲线的切线的斜率

设 C 是一条连续的平面曲线 $y=f(x)$ （如图）如何定义曲线在 $M(x_0, y_0)$ 处的切线，其斜率为多少？

设想在曲线 C 上任取一点 $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ 作割线 MN ，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，点 N 沿曲线 C 趋向 M ，割线 MN 在转动，绕点是 M 点，它的根限位置在 MT ，定义 MT 为曲线 C 在点 M 处的切线，因此当 $\Delta x \rightarrow 0$ 割线 MN 的斜率 $\bar{k}$ 趋向于切线 MT 的斜率 k ，因此

$$k = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

以上两个引例显然属于两个不同的领域，一个是物理问题，一个是数学问题，但解决问题的数学型式却一样，都是用函数的改变量除以自变量的改变量在自变量的改变量趋于零过程中的极限值来表示，抽象成数学概念。

定义 1：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，在邻域内自变量 x_0 有增量 Δx ，相应地函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ，若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 并称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$, $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$,

否则极限不存在, 则称 f 在 x_0 不可导, 若为 ∞ , 则称 f 在 x_0 处导数为无穷大, 记作 $f'(x_0) = \infty$ 。

关于定义:

1° 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 即差商极限式 (1) 极限存在, 故可导的充要条件是差商式左、右极限存在且相等, 于是定义

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

分别称为 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数, 因此就有:

“ $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 的左、右导数存在, 且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ ”

2° 导数的几种极限表式: 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 有定义, 可导的定义有:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

特别当 $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \quad \text{或} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (3)$$

3° $y=f(x)$ 在区间 I 上每一点都可导, 此时 $\forall x \in I$ 都有 $f'(x)$ 存在, 这样 $f'(x) \quad x \in I$ 为

I 上的新函数, 叫 $f(x)$ 的导函数, 且 $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}$

二、几个求导公式

$$(1) \quad (C)' = 0 \quad (C \text{ 为常数})$$

$$(2) \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, -\infty < x < +\infty)$$

$$(3) \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1, -\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(5) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$$

$$(6) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(7) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(8) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\text{证: (1) } (C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$(2) \quad (x^n)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} \Delta x + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (a^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a \end{aligned}$$

当 $a=e$ 有 (4)

$$\begin{aligned} (5) \quad (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log a^e}{x} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

$$\text{当 } a=e \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

类似 $(\cos x)' = -\sin x$

例 1 研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处的可导性。

$$\text{解: } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

所以 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导。(但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续)。

例 2. 研究函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

解：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\frac{2}{3}} = \infty$

所以 $f'(0) = \infty$

从 $f(x)$ 的图象看 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在点 $(0, 0)$ 处有切线 $x=0$ ，因此 $f(x)$ 在某点 x_0 处 $f'(x_0)$ 存在一定对应 $f(x)$ 在 x_0 的切线，但 $f(x)$ 在 x_0 有切线，但在 x_0 未必可导。

例 3 设函数 $y=f(x)$ ， $x \in (0, +\infty)$ ，在 $x=1$ 处可导，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$ ，

证明：函数在 $(0, +\infty)$ 内处处可导，并求 $f'(x)$ 。

证：由 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ，令 $x=y=1$ ， $f(1) = 2f(1)$ 即 $f(1) = 0$ 且

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f\left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] - f(x) = f(x) + f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - f(x) = f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - f(1)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= f'(1) \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

例 4 设 $f(x)$ 可导，且满足条件 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ ，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ ，处的切线的斜率为（ ）

- (A) 2 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) -2

解：选择 D，因为：

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} \cdot 2 = -1 \times 2 = -2$$

通过此例学生可进一步重视导数的极限表示式，并熟悉此表示式。

三、导数的几何意义与实际意义

从引例 2 知曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率应为 $f'(x) = \tan \alpha$ （其中 α 是切线与 x 轴正向的夹角）。

(1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，切线为 $x=0$

(2) 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ，切线： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\text{法线： } y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

例 5 求等边双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线和法线方程。

解: $k_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}} = -4$

所以切线: $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$, 即 $4x + y - 4 = 0$

法线: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$ 或 $2x - 8y + 15 = 0$

一般来说 $\frac{dy}{dx}$ 表示函数 y 关于 x 的变化快慢。

例 6 细棒的线密度 $m = f(x)$ $x \in [0, l]$, 在 x_0 处的线密度 $\rho = \frac{dm}{dx}$ 。

例 7 生物群的增长率 $N=N(t)$ 为在 t 时刻的个数, 当 $t=t_0$, 增长率为 $\frac{dN(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}$

例 8 经济学中的边际成本。设 $C=C(x)$ 表某公司生产 x 个某种产品的总成本,

$C'(x) = \frac{dC}{dx}\bigg|_{x=x_0}$ 称为边际成本。

四、导数与连续的关系

定理 1: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

证明: 由导数定义知 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$

故 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

或 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$

故 $f(x)$ 在 x_0 可导则在 x_0 处连续。

思考题:

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()

(A) 左、右导数都存在

(B) 左导数存在, 右导数不存在

(C) 左导数不存在, 右导数存在

(D) 左、右导数均存在

(答案: B)

第二讲 求导法则

教学目的与要求：

- 1、熟练掌握函数的和、差、积、商的求导法则
- 2、熟练掌握复合函数的求导法则
- 3、掌握反函数的求导法则
- 4、通过学习基本初等函数的求导公式及以上法则，对初等函数的求导熟练掌握。

知识点：和、差、积、商的求导法则，复函数的求导法则，反函数的求导法则，并由此推出 16 个基本初等函数的求导公式，从而对初等函数顺利求导。

重点：复合函数的求导

难点：复合函数的求导

教学方式：讲练结合

教学思路：

1、突破难点从分析函数结构开始，通过复合函数求导公式，总结出朗朗上口的求复合函数导数的打油诗，并运用于实际，以便顺利地学会对复合函数的导数计算，提醒学生，切忌丢项。

2、讲练结合，课前有题启发，课后有题小结，从各方面调动学生学习积极性，学会这应用整个始终的导数求法。

教学过程：

一、课前题复习导数概念

例 1 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解：（1）连续性 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ （无穷小·有界函数）

（2）可导性： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导。

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$ ，为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应如何选择 a, b ？

解： $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导连续，则有 $f(1-0) = f(1) = f(1+0)$ ， $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = f(1) = 1$

$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+} (ax + b) = a + b$ ，所 $a+b=1$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而有 $f'(1) = f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

故 $a=2$ $b=-1$

二、函数的和、差、积、商的导数

定理 1：(导数的四则运算法则) 设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上可导，则：

(1) 函数 $u \pm v$ 在 x 处可导，且 $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) 函数 uv 也在 x 处可导，且 $(uv)' = u'v + uv'$

特别地 $(cu)' = cu'$

(3) 当 $v \neq 0$ ，函数 $\frac{u}{v}$ 在 x 可导，且 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

证明：(1) 设 $y = u(x) + v(x)$

$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u' + v'$$

即 $(u + v)' = u' + v'$

类似可证 $(u - v)' = u' - v'$

(2) 令 $y = u(x)v(x)$ 则 $\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)$

由 $u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$ 得 $u(x + \Delta x) = u + \Delta u$

由 $v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v$ 得 $v(x + \Delta x) = v + \Delta v$

$$\text{故 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

由 u', v' 存在，而 u 在点 x 可导必连续，故 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\Delta u \rightarrow 0$ ，因此 $y' = u'v + uv'$

(3) 令 $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ 则 $\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$

$$\begin{aligned} \text{故 } y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)v - (v + \Delta v)u}{(v + \Delta v)v \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u}{(v + \Delta v)v \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - \frac{\Delta v}{\Delta x} u}{(v + \Delta v)v} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\Delta x \rightarrow 0 \text{ 时, } \Delta v \rightarrow 0) \end{aligned}$$

例 3 已知 $y = 2^x + \sqrt{x} \ln x$ 求 y'

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= (2^x)' + (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)' \\ &= 2^x \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

例 4 设 $y = \tan x$ 求 y'

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

例 5 设 $y = \sec x$ 求 y'

$$\text{解: } (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x \quad (x \neq k\pi \quad x \in \mathbb{Z})$$

例 6 设 $y = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ 求 y'

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= \frac{(\sec x)'(1 + \tan x) - \sec x(1 + \tan x)'}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{\sec x \tan x(1 + \tan x) - \sec x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}\end{aligned}$$

三、复合函数的求导法则

定理 2：(链式法则) 设函数 $u = g(x)$ 在 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在相应的 u 处可导，

则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

证：由于函数 $y = f(u)$ 在 u 处可导，由导数定义 $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u)$ ，其中

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0 \quad \text{若 } \Delta u \neq 0, \text{ 得 } \Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$$

若 $\Delta u = 0$ ， $\alpha(\Delta u)$ 无意义，于是 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$

规定 $\alpha(\Delta u) = 0$ ，于是仍有 $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$

总之 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}$ 成立

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

由于 $u=g(x)$ 在 x 处可导, 它在 x 处连续, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$,

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

定理 2 中 u 是中间变量, 函数 y 对 x 的导数等于 y 先对中间变量求导, 再乘以中间变量关于自变量的导数。如果函数的中间变量不只一个, 此方法也可推广。如

$$y = f(u) \quad u = \varphi(v) \quad v = \psi(x) \quad \text{则}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{而} \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\text{故复合函数 } y = f\{\varphi[\psi(x)]\} \text{ 的导数为: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

总之对复合函数的求导, 首先应分析函数的结构。首先求函数对最外的中间变量的导数, 乘以外层中间变量对里一点, 最后乘以最里的中间变量关于自变量的导数, 有打油诗说得形象:

复合函数易求导;

分析结构第一炮;

由表及里层层求;

终究破尽连环套。

例 7 设 $y = \ln \tan x$, 求 $\frac{dy}{dx}$

解: $y = \ln u \quad u = \tan x$ 为复合的复合函数 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \sec^2 x = \cot x \cdot \sec^2 x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

例 8 设 $y = \operatorname{sh} x$ 求 $\frac{dy}{dx}$

$$\text{解: } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ 所以 } (\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2} [(e^x)' - (e^{-x})']$$

$$\text{而 } (e^{-x})' = e^u \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}$$

$$\text{所以 } (\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

类似可证

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

例 9 设 $y = \ln \cos(e^x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$

解：分解函数 $y = \ln u$ $u = \cos v$ $v = e^x$

因此
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} (-\sin v) \cdot e^x = -e^x \tan(e^x)$$

简单写
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(e^x)} (\cos(e^x))' = \frac{1}{\cos(e^x)} (-\sin(e^x)) (e^x)' = -e^x \tan(e^x)$$

以上这种方形成一个链式求得法则。

例 10 设 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 求 $\frac{dy}{dx}$

解：
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (e^{\sin^2 \frac{1}{x}})' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} (\sin^2 \frac{1}{x})' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot (\sin \frac{1}{x})' \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (\frac{1}{x})' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin \frac{2}{x} \end{aligned}$$

例 11 设 $y = x^\mu$ ($x > 0$, μ 为常数), 求 $\frac{dy}{dx}$

解： $x^\mu = e^{\mu \ln x}$ 所以

$$(x^\mu)' = (e^{\mu \ln x})' = e^{\mu \ln x} (\mu \ln x)' = e^{\mu \ln x} \cdot \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

例 12 求下列导数

(1) $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ ($y' = \frac{4x}{3\sqrt{(1-2x^2)^2}}$)

(2) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ($y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$)

四、反函数的求导法则

定理 3(反函数的求导法则) 设区间 I 上单调连续函数 $x = f(y)$ 在点 y 处可导, 且 $f'(y) \neq 0$

在对应点 x 处可导, 并且 $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

证明 从略

例 13 求下列函数的导数

(1) $y = \arcsin x$ ($y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) ($x \in (-1,1)$)

$$(2) \quad y = \arccos x \quad \left(y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad (x \in (-1,1))$$

$$(3) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(4) \quad (\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

五、初等函数的求导问题小结

- 1、16 个求导公式
- 2、函数和、差、积、商的导数
- 3、复合函数的求导法则
- 4、反函数的求导法则

思考： 设 $y = \ln[\varphi(x^2)]$ ，求 y'' ，其中 φ 二阶可导。

$$(y' = \frac{2x\varphi'(x^2)}{\varphi(x^2)}, y'' = \frac{2\varphi'(x^2)\psi(x^2) + \psi x^2 \varphi''(x^2) - \psi x^2 \varphi'^2(x^2)}{\varphi^2(x^2)})$$

第三讲 高阶导数 微分概念

教学目的与要求：

- 1、巩固和综合复合函数的求导法则；
- 2、学习高阶导数；
- 3、掌握微分的概念

知识点： 高阶导数的概念与计算，微分的概念与计算

重点： 微分的概念

难点： 微分的概念

教学方式： 讲练结合

教学思路：

- (1) 小结复合函数的导数的计算，进一步熟悉巩固这个上一堂的重点；
- (2) 微分的概念学习尽量联系其几何意义

教学过程：

一、复习复合函数的导数

1、请学生默写 16 个求导公式， 和差积商的求导法则及反函数的求导法则， 复合函数求导法则。

2、举例

例 1 求下列各函数的导数：

$$(1) \quad y = \cos x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad y = \arccos(\cos x^2)$$

$$(3) y = (\ln x)^x$$

$$(4) y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

解答：

$$(1) y' = -2x \sin x^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos x^2 \sin^2 \frac{2}{x}$$

$$(2) y' = \frac{2x \sin x^2}{|\sin x^2|}$$

$$(3) y' = (\ln x)^x (\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$$

$$(4) \sec^2 x$$

$$\text{事实上 } y' = \frac{\cos^2 x \cos x - \sin x \cdot 2\cos x(-\sin x)}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2} \frac{\sec^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{2} = \sec^2 x$$

$$\text{例 2 已知 } y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x) = \arcsin x^2, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}.$$

$$\text{解：令 } \frac{3x-2}{3x+2} = u, \text{ 当 } x \rightarrow 0, u \rightarrow -1 \text{ 那么}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \arcsin u^2 \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)' = \arcsin u^2 \frac{12}{(3x+2)^2}$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \arcsin u^2 \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}\bigg|_{x=0} = \frac{3\pi}{2}$$

以上例题是上一堂课的内容， 鉴于复合函数导数的重要， 在此加以练习， 尽量让学生自己练习的基础上教师再详细讲解， 以达到巩固与提高的效果。

二、高阶导数

$$\text{引入定义 } v = \frac{ds}{dv} \text{ 故 } v = s'$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (s')' = s'', \text{ 记作 } \frac{d^2s}{dt^2}$$

定义 1 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上可导，又 $y' = f'(x)$ 在 I 内可导，则 $f(x)$ 在 I 上二阶可导，记作 $f''(x)$ ，若 $f''(x)$ 在 I 上可导，则称 $f(x)$ 在 I 上三阶可导，记导数为 $f'''(x)$ ，，，若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 I 上可导，称 $f(x)$ 在 I 上的 n 阶可导，并记导数为 $f^{(n)}(x)$ 。

若 $y = f(x)$ 在 I 上的 n 阶可导, 记作 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 或 $y^{(n)}$ 。

二阶与二阶以上的导数叫作高阶导数, $f(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 0 阶可导。

例 3 证明下列函数的几阶导数公式:

$$(1) (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) (x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \quad \mu \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$(5) [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x > -1)$$

仅证 (2) (5) 其它证明留给学生。

$$\text{证 (2)} \quad (\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\sin x)''' = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\text{一般地, } (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(5) [\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$[\ln(1+x)]'' = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$[\ln(1+x)]''' = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = (-1)^2 2!(1+x)^{-3}$$

$$[\ln(1+x)]^{(4)} = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} = (-1)^3 3!(1+x)^{-4}$$

$$\text{一般地} \quad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / (1+x)^n$$

上例的结论在今后有许多应用。

定理 1: 设函数 u, v 都是 n 阶可导, 则 $u+v, u-v, uv$ 也 n 阶可导, 并且

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$(u-v)^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \\ \triangleq \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

特别地 $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$ (c为常数)

仅证 (3)

证明 $(uv)' = u'v + uv'$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

用数学归纳法知 $(uv)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \cdots + uv^{(n)}$

例 4 设 $y = x^2 e^{2x}$ 求 $y^{(20)}$

解：令 $u = e^{2x}$, $u' = 2e^{2x}$, $u^{(n)} = 2^n e^{2x}$

$$v = x^2 \quad v' = 2x \quad v'' = 2 \quad u^{(n)} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{则 } y^{(20)} &= u^{(20)}v + 20u^{(19)}v' + \frac{20 \cdot 19}{2!}u^{(18)}v'' \\ &= 2^{20}e^{2x} \cdot x^2 + 20x \cdot 2^{19} \cdot 2xe^{2x} + \frac{20 \times 19}{2!}2^{18}21e^{2x} \\ &= 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95) \end{aligned}$$

这是一个常见的题型，希望同学们记住这一公式，掌握此解题方法。

例 5 已知 $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$ 求 $y^{(n)}$

解： $y = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{1}{x-a} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} \right]$$

$$\text{但由于 } \left(\frac{1}{x-a} \right)' = (-1)(x-a)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{x-a} \right)'' = (-1)(-2)(x-a)^{-3} = (-1)^2 2! (x-a)^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{x-a} \right)''' = (-1)(-2)(-3)(x-a)^{-4} = (-1)^3 3! (x-a)^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^n = (-1)^n n! (x-a)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

$$\text{同理 } \left(\frac{1}{x+a}\right)^n = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$\text{取 } y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a} \left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right]$$

三、微分概念

我们将介绍一个与导数密切相关，但又有本质区别的重要概念——微分，首先引进微分概念。

若 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导，则有公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

故 $f'(x_0)\Delta x$ 是 Δy 关于 Δx 的线性主部，且 Δy 与 $f'(x_0)\Delta x$ 仅相差关于 Δx 的高阶无穷小。

一般用线性主部去近似 Δy ，误差 $|o(\Delta x)|$ 是 Δx 的高阶无穷小。

定义 2 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有定义，若存在与 Δx 无关的常数 A ，使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则称 f 在 x_0 处可微，而 $A\Delta x$ 叫做函数 f 在 x_0 处的微分，记作 $df(x_0)$ ，若函数用 $y = f(x)$ 表示则可记作 $dy|_{x=x_0} = A\Delta x$ ，若 f 在区间 I 的每一点可微，则称 f 在 I 上可微。

由定义可知微分是自变量的改变量 Δx 的线性函数，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时微分与函数的改变量 Δy 的差是一个比 Δx 高阶无穷小量 $o(\Delta x)$ ，问题是如何确定 A ？

定理 1 $y = f(x)$ 在 x_0 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ 。

证：必要性， 设 f 在 x_0 处可微，由导数定义知

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ 得

$$f'(x_0) = A$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = A$ ，此时

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

充分性, 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

由定义 1 知 f 在 x_0 处可微, 且

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

关于定义 1:

(1) 定义 $f(x) = x$, 令 $df(x) = dx = f'(x)\Delta x = \Delta x$

故 $dx = \Delta x$, 故一般地 $dy = f'(x)dx$

(2) 微分的几何意义

三、常见的微分公式与微分法则:

1、常数与基本初等函数的微分公式

(1) —— (16) (板书)

2、函数和、差、积、商的微分法则 (板书)

3、复合函数的微分法则 (一阶微分形式不变性)

设有函数 $y = f(u)$, 若 u 是自变量, 根据定义有

$$dy = f'(u)du$$

若 u 是另一个变量 x 的可导函数 $u = g(x)$, 则由复合函数求导法则, 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分, 为

$$dy = f'(u)g'(x)dx$$

因为 $du = g'(x)dx$, 所以上式可写成 $dy = f'(u)du$ 。

这就说明无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数的微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变, 这一性质称为微分形式不变性。

例 6 $y = \sin(2x + 1)$ 求 dy
($dy = 2 \cos(2x + 1)dx$)

例 7 $y = \ln(1 + e^{x^2})$ 求 dy

$$(dy = \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}}dx)$$

例 8 利用一阶微分形式不变性求函数 $y = e^{1-3x} \cos x$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \text{解: } dy &= de^{1-3x} \cos x + e^{1-3x} d \cos x \\ &= \cos x e^{1-3x} d(1-3x) + e^{1-3x} (-\sin x)dx \\ &= e^{1-3x} (3 \cos x + \sin x)dx \end{aligned}$$

从而 $\frac{dy}{dx} = e^{1-3x} (3 \cos x + \sin x)$

思考: 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 ()

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3

答案: C

事实上 $f(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \geq 0 \\ 2x^3 & x < 0 \end{cases}$ 可求得 $f'(x) = \begin{cases} 12x^2 & x \geq 0 \\ 6x^2 & x < 0 \end{cases}$

及 $f''(x) = \begin{cases} 24x & x \geq 0 \\ 12x & x < 0 \end{cases}$ 而

$$f''_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{24x}{x} = 24$$

$$f''_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{12x}{x} = 12$$

即 $f''(0)$ 不存在，故只有二阶导数存在。

第四讲 隐函数的微分法，参数方程表示的函数的微分法

及本章内容小结

教学目的与要求：

- 1、熟练掌握隐函数的微分法
- 2、熟练掌握参数方程表示的函数的微分法；
- 3、巩固本章内容

知识点：

- 1、隐函数的概念及微分法
- 2、参数方程表示的函数概念及微分法

重点：两种函数的微分法

难点：两种函数的微分法

教学方式：讲练结合

教学思路：对两微分法自然引入，适当证明，认真示范，谆促练习。

教学过程：

一、复习微分概念及一阶微分形式不变性，并作练习：

例 1：已知 $f(x) = e^{-x} \cos 3x + (\tan \frac{\pi}{6})^3$ ，求 $dy|_{x=0}$ ($dy|_{x=0} = -dx$)

例 2 已知 $\frac{dy}{dx} = (a+x)(x+\sin x)^2$ 且 $u = x + \sin x$ ，求 $\frac{dy}{du}$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ， $\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \bigg/ \frac{du}{dx} = \frac{(a+x)(x+\sin x)}{1+\cos x}$

二、隐函数的微分法

1、隐函数的概念

$$y = f(x) \text{ ———— 显函数}$$

但如 $x^2 + y^2 = 1$, 确定了 x, y 之间的函数关系, 同样 $e^y - xy = 0$ 也确定了 x 与 y 的函数关系, 一般地 $F(x, y) = 0$ 中 x 在某区间内任取一值都有满足此方程的唯一的 y 值存在, 这称 $F(x, y) = 0$ 在该区间上确定了一个隐函数。这就是说在一个定义区间上定义了函数 $y = f(x)$, 使 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 那么 $y = f(x)$ 是由 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数。

隐函数 $F(x, y) = 0$ 有的可以显化, 有的不可显化。如 $x^2 + y^2 = 1$, 解出 y , 得 $y = \sqrt{1-x^2}$ 或 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 两个显函数, 而 $e^y - xy = 0$ 中解出 y 相当难, 故不去显化。

2、隐函数的微分法

难显化与不能显化的隐函数的导数如何求?

一般 $F(x, y) = 0$, 确定了 $F(x, f(x)) \equiv 0$ (*)

(*) 左边是一个关于 x 的复合函数, 可以用复合函数的求导法则, 但 $f(x)$ 的地方是 y , 故要视 y 为 $y(x)$, 两边求导之后, 计算出 $\frac{dy}{dx}$ 。

例 3 求由 $e^y - xy = 0$ 所确定的隐函数 y 关于 x 的导数。

解: 两边对 x 求导 (注意 y 是 x 的函数)

$$e^y \cdot y' - y - xy' = 0$$

$$\text{解之得 } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{e^y - x}$$

解法 2 对 $e^y - xy = 0$ 两边求微分得

$$d(e^y - xy) = e^y dy - xdy - ydx = 0$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^y - x}$$

例 4 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

解: 由隐函数的微分法, 得

$$1 - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (*)$$

$$\text{于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y} \quad (*, *)$$

再对 (*) 两边求关于 x 的导数, 注意到 $\frac{dy}{dx}$ 还是 x 的函数;

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \cos y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} (-\sin y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (*, *, *)$$

将 (*, *) 代入 (*, *, *) 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-4 \sin y}{(2 - \cos y)^3}$$

3、对数求导法

有一种函数叫幂指函数，如 $y = g(x)^{f(x)}$ ，当 $f(x), g(x)$ 关于 x 可导， $\frac{dy}{dx}$ 应存在，但如何求解呢？

例 5 $y = x^{\sin x} (x > 0)$ 的导数。

解：两边取对数得 $\ln y = \sin x \ln x$

两边求关于 x 的导数： $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$

$$\text{于是 } y' = \frac{dy}{dx} = y(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) = x^{\sin x} (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

例 6 求 $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}}$ 的导数

分析：此处 y 的表示式是显函数，可以直接求导，但右边的式子比较麻烦，如果先取对数，再用隐函数的求导法，就简单许多。

解：两边取对数

$$\ln y = \frac{1}{5} [\ln(x-5) - \frac{1}{5} \ln(x^2+2)]$$

两边求关于 x 的导数

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{5(x^2+2)} \right]$$

所以

$$y' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} \left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{5(x^2+2)} \right]$$

三、参数方程表示的函数的微方法

1、关于参数方程

抛物运动的轨迹方程：

$$\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

其中 v_1, v_2 分别是抛物运动的初始水平与铅直速度。

如果对同一个 t 时， y 与 x 有一个对应关系，故 y 是 x 的函数，且由此方程决定。

一般地，参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (*)$$

所确定的 y 与 x 之间的函数，由 $(*)$ 式确定， $(*)$ 式表示的函数就叫参数方程表示的函数。

2、参数方程表示的函数导数

定理 1 (参数方程求导法则) 设函数由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定

(1) 若 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 在区间 I 上可导, $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(2) 若 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 二阶可导, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

证: (1) 由于 $\varphi(t), \psi(t)$ 均可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$

$$dx = \varphi'(t)dt \quad dy = \psi'(t)dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}$$

(2) 将上式两边继续对 x 求导, 注意到 $\frac{dy}{dx}$ 是关于 x 的复合函数。

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \end{aligned}$$

例 7 已知椭圆的参数方程为: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, 求椭圆在 $t = \frac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程。

(作图, 答案: $bx + ay - \sqrt{2}ab = 0$)

例 8 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数。

(作图, 答案, $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{t}{2}$ $t \neq 2n\pi$ n 为整数 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$ $t \neq 2n\pi, n$ 为整数)

四、小结本章内容

(1) 内容小结

(2) 举例

例 9 求下列导数

(1) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$

(答案: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{4t^2}$)

(2) $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$ 求 y'

($y' = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})x}}$)

(3) 求由方程 $2y - x = (x - y) \ln(x - y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy 。

($dy = \frac{2 + \ln(x - y)}{3 + \ln(x - y)} dx$ 或 $dy = \frac{x}{2x - y} dx$)

例 10 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解: $\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)] - [f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$

第四章 微分中值定理与导数应用

第一、二讲 微分中值定理

教学目的与要求：

- 1、掌握极值、极值点的概念
- 2、掌握 Fermat 定理, 熟练掌握以 Lagrange 定理为中心的微分中值定理 (包括 Rolle, Lagrange, Cauchy 及 Taylor 定理) 的条件与结论。
- 3、能利用微分中值定理作一些证明题, 求解题等。

知识点：极值与极值点的概念；微分中值定理与推论。

重点：微分中值定理的认知与证明, 明确定理的条件是充分条件, 及定理中 ξ 的存在性与位置的不确定性。

难点：利用微分中值定理做题, 尤其是证明题。

教学方式：讲练结合

教学思路：

- 1、由于此次课内容是学习大学数学以来的理论性较强的课, 学生会感觉抽象, 故上课内容尽量联系实际, 如从定理的几何意义引出定理, 证明也尽量联系几何实际, 于是就有“一个几何事实”引定理, 两个辅助函数证定理及三个定理的“包括”关系小结定理的教学方式,

处理前三个定理。对 Taylor 定理可以用发现法的方式讲演定理。

2、介于 ξ 的存在与不确定性在证明 Cauchy 定理时，在学生易错的地方将错就错，引发学生思考，提高学生的主观能动性。

3、证明 Lagrange 定理时，用两方法作辅助函数，以开拓学生思路，克服对定理证明的抽象感觉。

教学过程：

一、一个几何事实：设有光滑弧段 AB，连接端点 A 与 B 作 AB 弦，则在 AB 上至少存在一点 ξ ，使得该点的切线平行于 AB 弦。如图

二、函数的极值及其必要条件

1、极值定义

定义 1：设有函数 $y = f(x)$ $x \in I$ ，存在 $x_0 \in I$ ，若 $\exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0, \delta) \subseteq I$ ，恒有 $f(x) \geq f(x_0)$ ，则称 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$ ， x_0 为 f 的极小值点；若有 $f(x) \leq f(x_0)$ ，则称 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$ ， x_0 为 f 的极大值点。

如图

$f(x_1)$ ， $f(x_4)$ ， $f(x_6)$ 为 $f(x)$ 的极小值， x_1 ， x_4 ， x_6 ，其极小值点；

$f(x_4)$ ， $f(x_5)$ ， $f(x_7)$ 为 $f(x)$ 的极大值， x_2 ， x_5 ， x_7 ，其极大值点；

$f(x_3)$ 不是极值。

注意：①、极小值不一定小于极大值，如 $f(x_7) < f(x_4)$ ；

②、极值点可能是可导点，也可能是不可导点。

③、稳定点不一定是极值点，如 x_5 为 $f(x)$ 的稳定点，但不是极值点。

2、Fermat 定理

定理 1：设函数 $y = f(x)$ ， $x \in (a, b)$ ，在 $x_0 \in (a, b)$ 取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0) = 0$ 。

证明：不妨设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值，则存在 $\delta > 0$ ， $\forall x \in U(x_0, \delta) \subseteq (a, b)$ 时，有 $f(x) \leq f(x_0)$ ，若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 则

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

若 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 则 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$,

而
$$\left. \begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \end{aligned} \right\} \text{由于 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 可导}$$

故有 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

所以 $f'(x_0) = 0$

证明思路：可以从几何上引入，函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点都可导，从而每一点都有不垂直于 OX 轴的切线， $x_0 \in (a, b)$ 且为极大值点，从图象上看 $f(x)$ 在 x_0 的切线平行于 x 轴，从而知 $f'(x_0) = 0$ ，证明过程中用到左、右导数的定义，保号性定理及极限存在的第 I 充分条件。

三、微分中值定理

微分中值定理包括了 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rolle} \\ \text{Lagrange} \\ \text{Cauchy} \\ \text{Taylor} \end{array} \right\}$ 定理

1、Rolle 定理

“一个几何事实”中的 AB ，搁置在坐标系下，且令 $AB \parallel OX$ ，可以叙述成定理 2。

定理 2：设 $y = f(x)$ ， $x \in (a, b)$

- (1) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续；
- (2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导；
- (3) $f(a) = f(b)$

则至少 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

由题设画出示意图，并引导学生观察，切线平行于 AB 弦的点，或为 $f(x)$ 的最大值点，或为 $f(x)$ 的最小值点。并利用 Fermat 定理作出证明。

证明：由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则一定 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$

$f(x_1) = M$ (M 为 f 的最大值)

$f(x_2) = m$ (m 为 f 的最小值)

(1) 如果 $M = m$ ，又因为 $f(a) = f(b)$ ，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为常数，故在 (a, b) 内每一点都可以作 ξ ，且 $f'(\xi) = 0$

(2) 若 $M > m$ ，又 $f(a) = f(b)$ ，故 M, m 两数中至少有一个不等于 $f(a)$ ，不妨设 $M \neq f(a)$ ，即 $x_1 \in (a, b)$ ，又为 $f(x)$ 的最小值点，由 Fermat 定理知 $f'(\xi) = f'(x_1) = 0$ 。推论 可导函数 $f(x)$ 在任何两个零点之间至少有 $f'(x)$ 的一个零点。

关于定理：Rolle 定理的条件 (1) (2) (3) 虽然是充分条件，但也缺一不可。（参照书 P93 讲解），以下两个例题，以巩固对 Rolle 定理的理解。

例 1 证明方程 $x^3 + 2x + 1 = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内有且仅有一个实根。

证明 设 $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$, $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续, 由零点定理, 在 $(-1, 0)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi) = 0$ 。

以下证明唯一性, 用反证法。

若 $\exists x_1, x_2 \in [-1, 0]$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 由推论知至少 $\exists \eta \in (-1, 0)$, $f'(\eta) = 0$, 但

$f'(x) = 3x^2 + 2$ 在实数域上无根, 故假设不成立。

例 2 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 并且 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, 证明,

至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 内, $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

分析: 要证 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$, $\xi \in (0, 1)$ 或 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ $\xi \in (0, 1)$ 或即

$[xf(x)]'|_{\xi} = 0$, 因此可令 $F(x) = xf(x)$ 作辅助函数, 再验证 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且 $F(0) = F(1) = 0$, 由 Rolle 定理, 便有证明结论。

例 3 验证 Rolle 定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ 上满足 Rolle 定理条件。

证明时注意从两个方面说明问题:

(1) $y = \ln \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ 上满足 Rolle 定理条件;

(2) $\exists x_0 = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$, $(\ln \sin)' \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$

2、Lagrange 定理

如果将 AB 任意地搁在坐标系下 (否定有 $f(a) = f(b)$), 则可以叙述成定理的条件 (1),

(2), 而 AB 弦的斜率为: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

从而得出至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 等的结果。

叙述出定理 3。

定理 3 (Lagrange 定理) 设 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导;

则至少 $\exists \xi \in (a, b)$ $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 或 $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$ 。

证明此定理必须用辅助函数, 让辅助函数满足 Rolle 定理条件, 通过 Rolle 定理的结论, 达到证明此定理的目的, 我们由直观到抽象介绍两种作辅助函数的方法。

(1) 几何方法：

$$AB \text{ 的方程: } y = f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$AB \text{ 弦的方程: } y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

注意到 AB 与 AB 的端点重合，作辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad x \in [a, b]$$

显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 Rolle 定理条件，故至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $F'(\xi) = 0$ 即有

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad x \in [a, b]$$

(2) 代数方法：

$$\text{由结论出发欲证 } f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ 或即}$$

$$\left[f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x \right]' \Big|_{x=\xi} = 0, \text{ 因此}$$

令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ ，验证满足 Rolle 定理条件，便可以由 Rolle 定理结论，证明 Lagrange 定理。

关于 Lagrange 定理：

(1) 定理的另一种形式：

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a) \quad \xi \in (a, b) \text{ 也称为 Lagrange 公式, 由于 } x \in [a, b], \text{ 故}$$

$$0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1 \quad \text{令 } \theta = \frac{\xi - a}{b - a}$$

于是 $\xi = a + \theta(b - a)$ ，Lagrange 公式也可以写成

$$f(b) = f(a) + f[a + \theta(b - a)](b - a) \quad (0 < \theta < 1)$$

(2) 定理中若 $b < a$ ，考虑 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上作证明同样会有 Lagrange 公式。

(3) Lagrange 定理又名有限增量定理：取 $a = x_1, b = x_2$ ，在 x_1, x_2 为端点的区间上满足 Lagrange 定理条件，于是就有结论：

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \xi \text{ 介于 } x_1, x_2 \text{ 之间} \quad (*)$$

再令 $a = x, b = x + \Delta x$ ，在以 $x, x + \Delta x$ 为端点的区间上有

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x, \quad \xi \text{ 在 } x, x + \Delta x \text{ 之间} \quad (**)$$

(*) (**) 都表示函数改变量，自变量改变量及函数导数间的关系，因此定理又称为有限增量定理。

以下举例

例 4 验证 Lagrange 定理对 $f(x) = \arctan x \quad x \in [0, 1]$ 的正确性。

解：(1) $f(x) = \arctan x \quad x \in [0, 1]$ 满足 Lagrange 定理条件 (1)(2)，故应存在 $\xi \in (0, 1)$ ，

$$f'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\pi}{4}$$

(2) 事实上 $x_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} - 1 \in (0,1)$ 时, $\left. \frac{1}{1+x^2} \right|_{x=x_0} = \frac{\pi}{4}$ 。

此处 x_0 是由令 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{\pi}{4}$ 而得, 这种方法具有一般意义, 此

类题许多考卷上出现过。

例 5 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内可导, 且当 $x \in (0,1)$ 时 $f'(x) \neq 1$, 又 $f(0) > 0, f(1) < 1$, 证明存在唯一一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = \xi$ 。

分析: 此题证明学生会想一开始就用 Lagrange 定理, 当然既证不出结论, 而且有两条条件用不上, 于是用到零点定理, 再用 Lagrange 定理。

证明: 令 $F(x) = f(x) - x$, 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 又 $F(0) = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$, 由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $F(\xi) = 0$ 或有 $f(\xi) = \xi$ 。

再证明唯一性, 设有 $\eta \in (0,1)$ 使得 $f(\eta) = \eta$ ($\eta \neq \xi$ 不妨设 $\xi < \eta$), 则在以 ξ, η 为端点的区间上有,

$$\frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} = 1 = f'(\xi) \quad \xi \in (\xi, \eta)$$

与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾, 因仅存在唯一的 $\xi \in (0,1)$, $f(\xi) = \xi$ 。

例 6 证明当 $x > 0$ 时, $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x$

分析: 此处用 Lagrange 定理证明不等式, 而且 Lagrange 定理做题首先要考虑一个函数 $f(x)$ 和考虑的区间, 而一般从题设和证明的结论出发, 因此此处的

$f(x) = \ln(1+x)$ $x \in (0, x)$, 于是有:

证明: 设 $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上满足 Lagrange 条件因而至少 $\exists \xi \in (0, x)$

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) \quad \xi \in (0, x)$$

具体为 $\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi} \cdot x$

又 $0 < \xi < 1$, 故 $\frac{1}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$

从而有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 当 $(x > 0)$

证明不等式是一元微分学中的一难点, 常用的方法是用微分中值定理及以后学习的单调性, 此题起到一个示范作用。

3、Cauchy 定理

(1) “一个几何事实”中, 如果 AB 用参数方程的形式:

$$\begin{cases} X = g(x) \\ Y = f(x) \end{cases} \quad x \in [a, b]$$

我们一起描述条件与结论, 条件为:

- 1) $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
- 2) $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内可导;

3) $g'(x) \neq 0$

而结论中因为 $\frac{dY}{dX} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ，而 AB 弦的斜率为 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ ，因此就有 Cauchy 定理结

论：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立，板书 Cauchy 定理。

(2) 引导大家作出辅助函数利用 Rolle 定理证明定理：

(a) 几何法

由于 AB : $Y = f(x)$

$$\overline{AB}: Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

故作 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$

(b) 代数法，从结论出发：作 $F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ 。

让学生自己证明此一定理。

(3) 提问 $f(x)$ ， $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均满足 Lagrange 中值定理条件，于是有，至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (*)$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\xi) \quad (**)$$

由于有 $g'(x) \neq 0$ 故可以 (*) 式两边除以 (**) 式两边，即得证 Cauchy 定理，此法对吗？为什么？

回答因为 ξ 不一定相同的原因是否定的，这个问题相对基础好的班会有学生能做出正确回答，教师应好好讲解，以使大家明确： ξ 的存在性，但位置不确定的。

以上定理 1、定理 2 及定理 3 的关系。

Cauchy 定理中令 $g(x) = x \Rightarrow$ Lagrange 定理 $\underline{f(b) - f(a)}$ Rolle 定理，因此：

4、Taylor 定理

在上一章如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微，则可以有 $dy \approx \Delta y$ 或即 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

上式表示在 x_0 附近，用一次多项式 $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来逼近 $f(x)$ ，这种逼近形式简单运算方便，但也存在精度不高，不能估计误差等不足。其原因从几何上看是曲线 $y = f(x)$

在点 x_0 附近是其切线来逼近，设想如果改用曲线来近似表示精度一定能增高，在曲线中比较简单

的是关于 $x - x_0$ 的高次多项式，因此就用在 x_0 附近用 $x - x_0$ 的高次多项式表示 $f(x)$ ，不妨设此多项式为：

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

然而：

(1) $P_n(x)$ 中待定的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是什么？与 $f(x)$ 有什么关系？

(2) $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 之间的误差是多少？

(3) $f(x)$ 满足什么条件？

Taylor 定理回答了这些问题。

定理 4 (Taylor 定理) 设 $y = f(x)$ $x \in I$ 具有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in I$, 则对任何 $x \in I$,

在 x 与 x_0 之间至少存在一点 ξ , 使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

简记

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

证明：令 $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{其中只需证明} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间。}$$

令 $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$, 则有 $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$

$$g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)! \quad \text{又}$$

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

对 $R_n(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 与 x 为端点的区间上应用 Cauchy 定理得

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

对函数 $R'_n(x)$ 与 $g'(x)$ 在以 x_0 与 ξ_1 为端点的区间上应用 Cauchy 定理得：

$$\frac{R'_n(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} = \frac{R''_n(\xi_2)}{g''(\xi_2)} \quad \xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间, } n+1 \text{ 次以后得}$$

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(\xi_n) - g^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

从而 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间)

定理得证。

关于 Taylor 定理：

(1) Taylor 公式中令 $n=0$ 变成 Lagrange 公式，因此 Taylor 公式是 Lagrange 定理的推广。

(2) Taylor 公式余项类比 Lagrange 公式有另一种形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\theta \in (0,1))$$

(3) Taylor 定理中，若用 $R_n(x)$ 去逼近 $f(x)$ ，若 $f(x)$ 在 I 上可导，且 $\exists M > 0$ ，使 $\forall x \in I$

$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ ，那么

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!} \right| |x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

由此可见，误差在当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶无穷小，于是

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

又若 I 为有限区间 (a, b) 则

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

这表明只要 $f^{(n+1)}(x)$ 在有限区间上有界，用 n 次多项式 $P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ ，绝对误差

$|R_n(x)|$ 随 n 的增大可变得很小，从而可适当取 n 使计算达到要求的任何精度。

(4) 取 $x_0=0$ ，Taylor 公式可写成

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

—— Maclaurin 公式

以上我们讨论与证明了微分中值定理，它包括了 4 个定理，之所以，统称为微分中值定

理,我想是它们中的 ξ 既有存在性也有位置不确定性,且 ξ 一定是属于所考虑的区间之中。
以下作 Taylor 定理的应用举例。

例 7 求 $f(x) = e^x$ 的 Maclaurin 公式

解: $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ 所以

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$$

由 Maclaurin 公式得

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

例 8 求 $f(x) = \sin x$ 的 Maclaurin 公式

解: 因为 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 所以

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0 \cdots$$

从而

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^{2m-1} \frac{\sin[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

类似地

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{2m+1} \frac{\cos \theta x}{(2(m+1))!} x^{2(m+1)} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}} \quad (0 < \theta < 1, x > -1)$$

通过此例题练习,让学生学会如何将函数变成 Maclaurin 公式,尤其是余项的写法,同时这些结论在今后学习级数有重要的应用,另外为什么展的阶数如上也应与学生说明白。

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2!} \frac{x^4}{4} - o(x^5)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{12} + \frac{o(x^5)}{x^4} - \frac{o(x^4)}{x^4} \right] = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

在学习 L'Hospital 法则之前碰到这种求极限的题，不能说不是一个难题，但应用 Taylor 公式却比较简单地解决了，学生一定会倍感兴趣，另外题中出现 $o(x^5)$, $o(x^4)$ 应好好说明一下。

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续，且 $f(a) = f(b) = 0$

$$\text{证明 } \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

分析：此题比较抽象不太好想，但我仔细想想 $f(x)$ 是区间上的可导函数， $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ 为

分析：此题比较抽象不太好想，但我仔细看 $f(x)$ 是区间上的可导函数， $\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ 为

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，而题中出现 $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ ，因此是否用 $f(x)$ 在最值点与端点为端点的两个区间上用 Taylor 定理，于是

证：由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续，故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，必在 $[a, b]$ 取得最大值与最小值，又 $f(a) = f(b) = 0$ ，所以最大值一定大于零，设 $x=c$ 为最大值点，且最大值点一定是极值点， $|f(c)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ $f'(c) = 0$

由 Taylor 公式

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2!} (a-c)^2 \quad \xi_1 \in (a, c)$$

$$f(b) = f(c) + f'(c)(b-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} (b-c)^2 \quad \xi_2 \in (b, c)$$

$$\text{因此 } f(c) = -\frac{1}{2} f''(\xi_1) (a-c)^2 = -\frac{1}{2} f''(\xi_2) (b-c)^2 \quad (f'(c) = 0 = f(a) = f(b))$$

而 $(a-c)^2$ 与 $(b-c)^2$ 至少有一个不超过

$$\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\text{从而 } \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = f(c) \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

用 Taylor 公式证明不等式是一种常用的方法，这些不等式的特点是高阶导数与函数之间的相互控制，利用 Taylor 公式解决这类问题，关键在于选取 x 与 x_0 ，一般区间的端点、中点以及 $f'(x)$ 的零点常是常选的点。

第三讲 L'Hospital 法则

教学目的与要求：

1、掌握 L'Hospital 法则中两个定理及其证明方法；

2、熟练掌握用 L'Hospital 法则求各类未定式的极限。

知识点：L'Hospital 法则；未定式分类，对各类未定式采用对应的求极限的步骤与方法。

重点：用 L'Hospital 法则求极限

难点：未定式的分类，并明确各类对应的利用 L'Hospital 法则求极限的方法。

教学方式：讲练结合

教学思路：L'Hospital 法则求极限是一元函数的极限求解的一个重要方法，它的困难不在于对“ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ”型的未定式的求解过程，而在于对未定式的判断与分类，并掌握对各类未定式相应的解题技巧，因此，讲课一定要注重这些方面。另外应注意特殊过程上的函数的极限的求法。

教学过程：

一、未定式

在某个极限过程中 $f(x), g(x)$ 均以零为极限，但它们的商的极限值是否能确定呢？如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$$

虽然分子，分母在 $x \rightarrow 0$ 的过程中极限均为零，但商的极限各有不同，因此称之为未定式，并用“ $\frac{0}{0}$ ”型来表示。

当分子，分母均在同一过程中以无穷大为极限称之为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式。

两个函数作积在同一过程中一个以零为极限，另一个以无穷大为极限，称为“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式。

两个函数作差，被减函数与减函数都以无穷大为极限，称为“ $\infty - \infty$ ”型未定式。

还有幂指函数在同一过程中，底函数与指函数均以零为极限称为“ 0^0 ”型未定式；在同一极限过程中底函数以 1 为极限，指数以无穷大为极限，称为“ 1^∞ ”型未定式，还有“ ∞^0 ”型未定式。

我们将“ $\frac{0}{0}$ ”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式称作 I 型未定式，而“ $0 \cdot \infty$ ”与“ $\infty - \infty$ ”称作为 II 类未定式，剩下的“ 0^0 ”、“ 1^∞ ”及“ ∞^0 ”型未定式称为 III 类未定式。

二、求解 I 型未定式

(一) 定理 1

定理 1：设函数 $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $U(x_0, \delta)$ 满足

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$(2) f(x), g(x) \text{ 在 } U(x_0, \delta) \text{ 内可导, 且 } g'(x) \neq 0$$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大)

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

证: $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可能连续可能不连续, 若不连续补充定义令 $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

使 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续, 不影响 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 的值

取 $x \in U(x_0, \delta)$ 则 f, g 在 $[x_0, x]$ (或 $[x, x_0]$) 上满足 Cauchy 定理条件, 至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (x_0, x)$ (或 (x, x_0)) 上, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{而当 } x \rightarrow x_0 \text{ 也有 } \xi \rightarrow x_0.$$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

关于定理:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 “ $\frac{0}{0}$ ” 型, 可以分段使用此 L'Hospital 法则。

(2) 以上的 $x \rightarrow x_0$ 也可以推广到 $x \rightarrow x_0^-$, 或 $x \rightarrow x_0^+$ 以及 $x \rightarrow \infty$ 等过程。

应用举例

例 1 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left(\begin{array}{l} \text{"0/0"} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \end{array} \right)$

例 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3^x - 1}{(e^x - 1)^2 e^x}$

解: 由于当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - 1 \sim x$ 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3^x - 1}{x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 3^x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x - 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{2x} - e^x}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

此处是 L'Hospital 法则与等价无穷小并用, 使解题更简便。

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x[\ln(1 + x) - x]}$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x \cos x [\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} (1+x) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

用 L'Hospital 法则解题也应与初等变换结合起来, 尽量用等价无穷小等方法化简后再用法则, 也用到重要极限等, 设想一下此题一开始就用 L'Hospital 法则, 将有多么繁, 而且结果一定能出来。看来 L'Hospital 法则是一个很好的法则, 但也要灵活使用, 才会事半功倍, 另外连续用此法则时, 用前都要验证是否是 “ $\frac{0}{0}$ ” 型。

例 4 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = 2$, 则 ()

A: $a=1, b=-\frac{5}{2}$;

B: $a=0, b=-2$;

C: $a=0, b=-\frac{5}{2}$;

D: $a=1, b=-2$;

解: 选 A, 事实上

原极限 $\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a - 2bx}{2x} = 2$, 因此当 $x=0$ 时分母为零, 分子也必为零, 因而 $a=1$;

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a - 2bx \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{(1+x)^2} - 2b}{2} = 2$

于是 $\left. \frac{-1}{(1+x)^2} - 2b \right|_{x=0} = 4$ 或 $-1 - 2b = 4 \quad \therefore b = -\frac{5}{2}$

此类已知极限结果, 求其中参数题, 经常出现, 这种过程是一个分析与计算的过程, 哪一环薄弱就解不出来, 因此讲解时慢一点, 尽量讲清分析过程的思路。

以上都是讲解决 “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式的方法, 对于 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 未定式也有相应的定理。

(二) 定理 2

定理 2: 设 $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U(\delta, x_0)$ 内满足:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

(2) $g(x), f(x)$ 在 $U(\delta, x_0)$ 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

证明类似于定理 1，定理 1、定理 2 的极限过程都在 $x \rightarrow x_0$ ，也可以推广到 $x \rightarrow x_0^+$ ，

$x \rightarrow x_0^-$ 及 $x \rightarrow \infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ ， $x \rightarrow +\infty$ 等。

例 5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ ($a > 0, b > 0$)

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos ax}{\sin ax} \cdot a \cdot \frac{\sin bx}{\cos bx} \cdot b = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{ax} = 1$

例 6 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^\beta} \ln a$ ($a > 1, \beta > 0$)

解：原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta a^\beta \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\beta^2 (\ln a)^2 a^\beta} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{\beta^n (\ln a)^n a^\beta} = 0$

a^β 较 x^α 更高阶无穷大 ($a > 0, \beta > 0$)

同样可以证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ ($\beta > 0, \alpha > 0$)

从而 $(\ln x)^\beta$ 较 x^α 更低阶无穷小，此两结论今后可用。

(三) L'Hospital 法则要慎用

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

解：该式属于 “ $\frac{0}{0}$ ” 型，但因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

不存在，因而不能用 L'Hospital 法则，但不能由此得出结论，说明原极限一定不存在，事实上经过适当组合后仍可求得其极限。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \times 0 = 0$$

三、用 L'Hospital 法则求其它类型未定式的极限

以上我们学习了定理 1、2，能够解决求 I 类未定式的极限，而 II 型和 III 型未定式分别可用通过初等变换，如无穷大与无穷小的关系，通分及取对数取指数等方法化成 I 型未定式

再予以求解。

例 8 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)$

解：此属“ $0 \cdot \infty$ ”型

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 \end{aligned}$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

解：此系“ $\infty - \infty$ ”型

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

例 8, 例 9 是 II 类未定式, 其“ $0 \cdot \infty$ ”我们可以将其中一个因式放到分母上去, 利用无穷小与无穷大的“倒数”关系化此型为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”未定型, 而“ $\infty - \infty$ ”未定型则可用通分, 有理化等先将式子化为 I 型, 再用 L'Hospital 法则。

例 10 求极限 $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$

解：此系“ 1^∞ ”型

$$\text{令 } y = (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}} \quad \text{则 } \ln y = \frac{\ln \ln x}{1 - \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln y = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{1 - \ln x} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}} = e^{-1}$$

例 11 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

解：此系“ 0^0 ”未定式, 可以用两种方法求解。

$$(1) \quad \text{令 } y = x^{\sin x} \quad \text{则 } \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = 0$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^0 = 1$$

以上 (1) (2) 分别用对数法与指数法来解, 先取对数或指数, 式子中便有 “ $0 \cdot \infty$ ” 未定式, 再用初等变换, 将其化成 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, 再用 L'Hospital 法求极限, 用对数法时, 注意还原成原式的极限。

例 12 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$

求解此题可以用等价无穷小等方法, 但也可以用 L'Hospital 法则, 用此法则时注意法则的条件, 而 $n \rightarrow \infty$ 是取整且趋于 ∞ , 故是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$ 的一种特殊情况, 于是有:

$$\text{解: 因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \ln a}{-\frac{1}{x^2}} = \ln a$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$

练习题:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(1 - \cos x)(e^x - 1)}$ (答案为 1)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right]$ (答案为 $\frac{1}{2}$)

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ (答案为 $e^{\frac{1}{2}}$)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$ (答案为 $e^{\frac{2}{\pi}}$)

思考题 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有二阶导数 $f''(x_0)$, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))}{h^2} = f''(x_0)$$

$$\left(\begin{aligned} \text{左} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 f''(x_0) = f''(x_0) \end{aligned} \right)$$

第四讲 函数的单调性、极值点极值最大（小）值点，最大（小）值

教学目的与要求：

- 1、利用函数的一阶导数讨论函数的单调性；
- 2、掌握极值点、极值的求法；
- 3、最大最小值的求法及应用。

知识点：

- 1、一阶导数的符号判别函数的单调性；
- 2、两个充分条件判别可导函数的极值、极值点；
- 3、最大最小值的求法及应用。

重点：极值、最值的求法

难点：还好，不太难

教学方式：讲授为主

教学思路：本堂课头序繁多应用性强，应多多从实际出发激发学生的学习热情，注意与以前知识联系，加强例题的分析。

教学过程：

一、函数的单调性

定理 1：设函数 $f(x)$ $x \in I$ 在 I 上连续，在 I 内可导，则下述命题成立。

- (1) 若在 I 内 $f'(x) > 0$ 则 $f(x)$ 在 I 上单调增加；
- (2) 若在 I 内 $f'(x) < 0$ 则 $f(x)$ 在 I 上单调减少。

证明：(1) $\forall x_1, x_2 \in I$ ，且 $x_1 < x_2$ 由 Lagrange 定理得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ $\xi \in (x_1, x_2)$

1° 若 $f'(x) > 0$ 故有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0 \quad \text{即} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

2° 若 $f'(x) < 0$ ，类似可证： $f(x_1) > f(x_2)$

例 1 讨论函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 的单调性。

解：令 $f'(x) = e^x - 1 = 0$ 得 $x = 0$ 由定理可有

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+

$f(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$
 可见 $f'(x)$ 的零点是 $f(x)$ 的增减分界点。

例2 讨论函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性。

解： $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

从 y' 的表示式看，其正负的分界点是其导数不存在的点 $x = 0$ ，由定理 3，知

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	不存在	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

上面两例可知 $f'(x)$ 的零点和不存在点都可能是 $f(x)$ 的增减的分界点，因此只要求出 $f'(x)$ 的零点和不存在的点将 $f(x)$ 的定义域分成若干区间，在其上讨论 $f'(x)$ 的正负符号便有 $f(x)$ 的单调性结论。

例 3 确定 $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$ 的实根的个数。

设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$

设想 $f(x)$ 的根的个数就是 $f(x)$ 表示的曲线经过 x 轴的次数，因此可用单调性来寻找。

解：令 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0$

得其零点 $x = 1, x = 3$ ，没有导数不存在点，于是

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	-10	$\nearrow$

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

故 $f(x)$ 在定域 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个实根（位于 $(3, +\infty)$ 内）。

例 4 证明 $3x < \tan x + 2\sin x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)。

证明 设 $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x$

$$f'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3 = \frac{1}{\cos^2 x} (1 + 2\cos^3 x - 3\cos^2 x)$$

$$= \frac{(1 - \cos x)^2 (1 + 2\cos x)}{\cos^2 x}$$

现 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ 因而 $f(x)$ 单调增加，而 $f(0) = 0$ 故 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x) > f(0) = 0$

从而 $3x < \tan x + 2\sin x$

二、函数的极值

从几何上看函数 $f(x)$ 的图形在定义域内点 x_0 处，如果由增变减，或者由减变增，则

$f(x)$ 在 x_0 处分别取得极小值或极大值，单调性可以用函数 $f(x)$ 的导数的正负号来判定，而 $f'(x)$ 正负的分界点从上一讲的例 1、例 2 知正是 $f'(x)$ 的零点和不存在的点。但导数的零点与不存在的点未必是极值点，于是有以下的讨论。

定义 1：使 $f'(x) = 0$ 的点称为稳定点（或驻点）。

对于可导函数而言，有

定理 2：（第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 可导，且 $f'(x) = 0$ ，则

	x	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
(1)	$f'(x)$	+	0	—
	$f(x)$	↗	极大值	↘
(2)	$f'(x)$	—	0	+
	$f(x)$	↘	极小值	↗
(3)	$f'(x)$	+	0	+
	$f'(x)$	—	0	—
	$f(x)$		没有极值	

求极值与极值点的步骤：

- (1) 讨论 $f(x)$ 在定义域内的驻点与不可导点；
- (2) 考虑驻点与不可导点处导数在左右近旁的符号变化，判别是否是极值点，是极大值点还是极小值点；
- (3) 求出各极值点的函数值，得到 $f(x)$ 的极值。

例 5 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的极值

解：(1) $D = (-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$

(2) 讨论与判别如下：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—		+
$f(x)$	↗	极大值 10	↘	极小值 -22	↗

例 6 求 $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ 的极值。

解： $f'(x) = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(6-x)^2}}$ 令 $f'(x) = 0$ 得

X	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	—	∞	+	0	—	∞	—
$f(x)$	$\searrow$	极小值 0	$\nearrow$	极大值 $2\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	无极值	$\searrow$

驻点 $x_1 = 4$ ，还有 $x_2 = 0, x_3 = 6$ 为 $f'(x)$ 不存在点， x_1, x_2, x_3 分定义域 $(-\infty, +\infty)$ 为 4 个区间，讨论如下：

通过以上两例题的讲解，让学生熟练了定理 1，并掌握了讨论单调区间及极值的求法、表示法等。

定理 3 (第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，并且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ ，则

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

证明：(1) 由于 $f''(x_0) < 0$ ，根据二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

由保号性定理 $\exists \delta > 0$ ，当 $x \in U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

故当 $\left. \begin{array}{l} x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时, } f'(x) > 0 \\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时, } f'(x) < 0 \end{array} \right\}$ 故 x_0 是 $f(x)$ 是极大值点。

(2) 同理可证。

例 7 求 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值。

解： $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$ 故驻点为 $x = 0, x = \pm 1$

$$f''(x) = 6x(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$$

故 $f''(0) = 6 > 0, x = 0$ 为极小值点，极小值为 $f(0) = 0$ 。又 $f''(1) = f''(-1) = 0$ ，故此定理不能判定该两点是否是极值点，但 $f'(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处左右两侧不改符号，故 $x = \pm 1$

不是极值点，从而仅 $x = 0$ 取得极小值 0。

从例 3 知用定理 2 要求函数 $f(x)$ 的二阶可导，且有时方法会失效，但若 $f''(x)$ 简单，有时使用此定理也会很方便。

三、函数的最值

在许多实际问题常有：怎样材料最省，成本最低及效率最高等，这就是最大值与最小值，统称为最值。在闭区间上连续的函数，一定有最值。但极值未必是最值，但可能是最值，于是设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则最大值 M ，最小值 m ，有

$$M = \max \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ 在驻点的函数值} \\ f(x) \text{ 在不可导点的函数值} \\ \text{端点的函数值} \end{array} \right\}$$

$$m = \min \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ 在驻点的函数值} \\ f(x) \text{ 在不可导点的函数值} \\ \text{端点的函数值} \end{array} \right\}$$

例 8 求函数 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 4$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。

$$\text{解： } f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 60x - 24 = 12(x-1)^2(x-2)$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2 \in [0, 3]$

而 $f(0) = 4$ ， $f(1) = -3$ ， $f(2) = -4$ ， $f(3) = 13$

故 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值 $M = f(3) = 13$

最小值 $m = f(2) = -4$

例 9 证明不等式 $\frac{1}{2^{p+1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ ($p > 1, 0 \leq x \leq 1$)

分析：证明不等式可以确定不等中一部分，它一定小于等于它的最大值，大于等于它的最小值。

证： $f(x) = x^p + (1-x)^p$ ，显然 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续；故存在最大最小值，事实上

$$f'(x) = px^{p-1} + p(1-x)^{p-1}(-1) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{2}$ ，而

$f(\frac{1}{2}) = 2^{1-p}$ ， $f(0) = 1$ ， $f(1) = 1$ ，故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 1，最小值为 2^{1-p} ，

于是

$$2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$$

这样我们已经会用微分中值定理证明不等式，函数的单调性证明不等式，今又可用函数的最值问题证明不等式。

例 10 如图铁路 $AB=100$ 公里，工厂在点 C ， $AC=20$ 公里，而公路单位费用 铁路单位费用 $=5:3$ ，欲建一个转运站 D ，问 D 建在何处费用最省？

(解法 1) 设 $AD=x$ (公里) $DB=100-x$ (公里)

$$CD = \sqrt{400 + x^2} \quad (\text{公里}), \text{ 故总的运费}$$

$$y = 5k \cdot \sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \leq x \leq 100)$$

$$\text{而 } y' = k \left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3 \right), \quad \text{令 } y' = 0 \quad x = 15$$

$$\text{又 } y(0) = 400k, y(15) = 380k, y(100) = 500\sqrt{1 + \frac{1}{25}}k$$

所以 $y(15)$ 最小, 故当 $x=15\text{km}$ 时费用最省。

(解法 2) 由于 $y' = 0$, 有唯一驻点 $x=15$, 介于 y 的最小值一定存在, 所以驻点的值就是最小值。故 $y(15) = 380k$ 为最小值。

在实际问题中, 求最值除了我们常规的求法以外, 也可以根据实际化简步骤, 归纳入下:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则其最大(小)值必在端点取得;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且仅有驻点 x_0 , 若 x_0 是 f 的极大

(小)值点, 则 x_0 就是 f 在 $[a, b]$ 的最大(小)值点。

例 11 用铁片做成一个容积一定的圆柱体形无盖容器, 问应如何设计才能使用料最省?

解: 设其表面积为 S , 高为 H , 半径为 R

建立目标函数: $S = 2\pi RH + \pi R^2$

$$\text{但 } V = \pi R^2 H \quad \text{故 } H = \frac{V}{\pi R^2} \quad \text{从而 } S = \frac{2V}{R} + \pi R^2$$

$$\text{而 } \frac{dS}{dR} = -\frac{2V}{R^2} + 2\pi R \quad \text{令 } \frac{dS}{dR} = 0, \text{ 得驻点 } R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$\text{又 } \frac{d^2 S}{dR^2} = \frac{4V}{R^3} + 2\pi \quad \left. \frac{d^2 S}{dR^2} \right|_{R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}} > 0$$

所以 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 为极小值点，即为最小值点

将 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 代入 $H = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = R$ 时材料最省。

练习题：在数 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 中求出最大的一个数。

(答案 $\sqrt[3]{3}$ 。提示：令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ，求其最大值。)

第五讲 函数图象的凹凸性，拐点与渐近线

教学目的与要求：

- 1、掌握用二阶导数的正负符号讨论函数的图象的凹凸性与拐点；
- 2、学会求函数的图形的水平、铅直及斜渐近线；
- 3、通过小结本讲及上讲的导数应用内容的基础上作图象掌握（1）—（6）个步骤，能作出一般函数的图象。

知识点：

- 1、 $f(x)$ 的二阶导数的正负符号如何确定 $f(x)$ 凹凸性以及拐点的确定与表示法；
- 2、渐近线的概念，水平，铅垂及斜渐近线的求法；
- 3、函数图象的作法。

重点：图象的作法

难点：函数是否有斜渐线的判别

教学方式：讲授为主，稍加练习

教学思路：二阶导数的几何应用与一阶导数的应用对比学习

教学过程：

一、函数图象的凹凸性、拐点

（一）用发现法引出凹凸定义

如果已知有起点 A ，终点 B ，作出的 AB ，发现如图，弧 ACB 、 ADB 差异很大。

定义 1：设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续， $\forall x_1, x_2 \in I$ ，恒有：

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的，或叫凹弧，若

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的, 或叫凸弧。

如图:

然而怎样才能不画图, 根据函数的分析表示式来判断函数是凸函数还是凹函数, 以前有过用函数导数的符号判断函数的单调性, 能否用函数 $f(x)$ 的导函数来讨论其图象的凹凸性呢?

直观上凸弧的切线的斜率, 即 $f'(x)$ 的值随 x 在 I 上的增大, 由正数变小经过零再变成负数, 且还在变小, 而凹弧则恰恰相反, 而 $f'(x)$ 的单调性, 应可由它的导数即 $f''(x)$ 的符号来判定。

定理 1: 设有函数 $f(x)$ $x \in (a, b)$ 具有二阶导数

(1) 若当 $x \in (a, b)$ 都有 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 的图形是凹的。

(2) 若当 $x \in (a, b)$ 都有 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 的图形是凸的。

证明: (1) $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 且 $x_1 < x_2$, 令 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$

并记 $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, 则 $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$

由 Lagrange 定理得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta_1 h)h \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

$$f(x_0) - f(x_0 - h) = f'(x_0 - \theta_2 h)h \quad (0 < \theta_2 < 1)$$

两式相减得

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h$$

对 $f'(x)$ 在区间 $[x_0 - \theta_2 h, x_0 + \theta_1 h]$ 再用 Lagrange 定理得

$$[f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h = f''(\xi)(\theta_1 + \theta_2)h^2$$

其中 $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$, 因为 $f''(\xi) > 0$, 故

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) > 0$$

$$\text{即 } \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} > f(x_0) \text{ 故 } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

所以 $f(x)$ 在 (a, b) 是上凹的。

(2) 类似可证。

如 $y = \ln x$, 我们知 y 在 $(0, +\infty)$ 上是凸弧, 事实上 $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

$y = x^a (x > 0, a > 1)$ $y'' = a(a-1)x^{a-2} < 0$ y 为凹弧, 事实上 y 也是凹弧。

例 1 证明： $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$ (其中 $x > 0, y > 0, x \neq y$)

分析：不等式的两边表示式来看，左边是 $f(t) = t \ln t$ 在 x, y 处的值的和，右边是点 x, y 的中点值的 2 倍，所以想到用函数凹凸的定义。

证明：令 $f(t) = t \ln t$ $f'(t) = 1 + \ln t$ $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$ (当 $x > 0$)

所以 $f(x)$ 是凹函数，由凹函数的定义

X	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—		—	0	+
$f''(x)$	—		—	0	+		+
$f(x)$	$\nearrow$ 	极小值 9	$\searrow$ 		$\searrow$ 	极小值 7	$\nearrow$ 

$$\frac{x + y}{2} \ln \frac{x + y}{2} < \frac{1}{2}(x \ln x + y \ln y)$$

或即 $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$

例 2 求 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ 的凹凸区间。

解： $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f''(x) = 12x - 18 = 12(x - \frac{3}{2})$$

单调性及凹凸性讨论如下：

$f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 是凸函数。

$f(x)$ 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 是凹函数。

在曲线上的点 $(\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$ 处，左边的弧是凸的，右边的弧是凹的，从而该点是凹凸的分界点

定义为：

定义 2：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $\exists \delta > 0$ ，曲线 $y = f(x)$ ，在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 为凹（凸）弧，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内是凸（凹）弧，则 $(x_0, f(x_0))$ 为该曲线的一个拐点。

定理 2：设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f'(x_0) = 0$ 。
证明留给同学们完成。

定理 2 是对二阶可导函数而言的，若 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，一定有 $f'(x_0) = 0$ ，但 $f''(x)$

的零点未必是拐点，如 $y = x^4$ ，在 $x = 0$ 处二阶导数为 0，但 $(0, 0)$ 不是 $y = x^4$ 的拐点，必须有 $f''(x)$ 在过 x_0 时改变正负符号， $(x_0, f(x_0))$ 才是拐点。还有从拐点的定义看， $f''(x_0)$ 不存在，但在 x_0 改变符号，此时 $(x_0, f(x_0))$ 也应是拐点。于是我们应对 $f''(x)$ 的零点和不存在的点作讨论。

例 3 求函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{10}(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点。

解： $f'(x) = x - \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ $f''(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}}$

$x=3$ 为 $f''(x)$ 的零点，而 $x=2$ 为 $f''(x)$ 不存在的点，但在 $f(x)$ 的定义域内，于是有：

X	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	+		-		+
$f(x)$		拐点 (2, 2)		拐点 $(3, \frac{18}{5})$	

二、曲线的渐近线

例如 $y = \frac{1}{x}$ ，当 $x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-$) 无限接近 y 轴，可以用极限式表示

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ，则 y 轴是 $y = \frac{1}{x}$ 的渐近线；

又当 $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$) 无限接近 x 轴，可见 x 轴是 $y = \frac{1}{x}$ 的渐近线。

介于它们的形状分别叫铅垂渐近线与水平渐近线，但渐近线不只有这两种，于是我们定义。

定义 3：若曲线 $y = f(x)$ 上动点 P 沿着曲线无限远离原点时，它与直线 l 的距离趋于零，则称直线 l 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线。

渐近线是直线，它包括了三种：

(1) 水平渐近线

当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ ，则直线 $y = c$ 为 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

例如 $y = \arctan x$ ，有 $y = \pm \frac{\pi}{2}$ 为其两条水平渐近线

(2) 铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则直线 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

如 $y = \frac{1}{x-1}$ ，由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ ，故 $x = 1$ 是曲线的水平渐近线。

(3) 斜渐近线

直线中除了水平与铅直线外，还有 $y = ax + b$ 这种斜线，设 $y = ax + b$ 为 $y = f(x)$ 的斜渐近

线, 则 $f(x)$ 与 $ax + b$ 的距离 $PN = |PM \cos \alpha| = |f(x) - ax - b| \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

(因为 $y' = a = \tan \alpha \quad \therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$)

当 $x \rightarrow \infty$ $|PN| \rightarrow 0$, 或即 $\lim_{x \rightarrow \infty} |PN| = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$ (*)

当然有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right] = 0$ (**)

故由 (**) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, 再由 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

反之以上方法求得 a, b , 能使

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

所以 $y = ax + b$ 为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

例 4 求函数 $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ 的渐近线。

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty$, 故 $x = 0$ 为其铅直渐近线

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty$ 故函数无水平渐近线。

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \infty$, 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 故 $y = x$ 是函数的斜渐近线。

例 4 告诉我们要求 $y = f(x)$ 的渐近线一般看铅垂、水平与斜渐近线有与没有。

例 5 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)(x - 2)}$ 的渐近线有 ()

A: 1 条 B: 2 条 C: 3 条 D: 4 条

解: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = +\infty$

所以 y 有水平、铅直渐近线各一条, 选 B。

(而 $\lim_{x \rightarrow -1} y$ 存在, $\lim_{x \rightarrow 2} y$ 存在)

例 6 已知曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与曲线 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公切线, 试求常数

a , 及切点 (x_0, y_0) 。

解：分别有 $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$ 和 $y' = \frac{1}{2x}$ 由于两曲线有公切线

可见 $\frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2x_0}$ 得 $x_0 = \frac{2}{a^2}$

将 $x_0 = \frac{2}{a^2}$ 代入 知 $y_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{a^2}$ 或 $y_0 = a\sqrt{\frac{1}{a^2}}$

于是 $a = \frac{1}{e}, x_0 = \frac{1}{a^2} = e^2, y_0 = a\sqrt{x_0} = \frac{1}{e}$

第六讲 函数图形的作法、弧微分及曲率

教学目的与要求：

1. 总结导数应用内容，介绍两种作图法，让学生掌握用导数作函数图形的步聚，顺利作出一般函数的图象。
2. 学习弧微分的概念，推导曲率公式，让学生知道弧微分曲率及曲率图等的求法。

知识点：

- (1) 作图的步骤与方法；
- (2) 弧微分，曲率等概念。

重点：作图象及曲率

难点：作图象

教学方式：讲授为主

教学思路：从小结导数应用入手，归纳作图的（1）~（6）个步骤，作出函数图象；用发现法，即设想成当年的发现者去发现曲率应如何表示一样，启发学生发现曲率的表示法加深印象，加强记忆。

教学过程：

一、描点法作图

根据函数的代数表示式求出其定义域，在定义域内找点，再描点作图，请同学们看懂教材内容；

二、利用导数作函数图象

1. 小结一、二阶导数的应用，如单调性、极值点与导数的关系，凹凸性、拐点与二阶导数间的关系。
2. 小结出 $y = f(x)$ 作图象的步聚：
 - (1) 确定函数 f 的定义域，求出一阶，二阶导函数 $f'(x)$ ； $f''(x)$ ；
 - (2) 求出函数 $f(x)$ 的驻点，导数 $f'(x)$ 不存在的点， $f''(x)$ 的零点及 $f''(x)$ 不存的点，并用这些点把定义域划分为多个部分区间；
 - (3) 确定在这些区间内 $f'(x)$ ， $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的单调性和凹凸性，极

值点和拐点；

(4) 确定函数图形的渐近线，以及函数的其它性态，如奇偶性、周期性等；

(5) 讨论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 的情况，补充一些点的坐标；

(6) 描图。

例 1，描绘函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形。

解：(1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，由于 $f(x) = f(-x)$ ，所以函数为偶函数，图象关于 y 轴对称，因此只需讨论在 $[0, +\infty)$ 上该函数的图形即可

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1)$$

(2) 当 $x_1 = 0$ $f'(x) = 0$ ，当 $x_2 = 1$ $f''(x) = 0$ 故 $x = 0, 1$ 分定义 $(0, +\infty)$ 为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

(3) 在 $(0, 1)$ 内 $f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 单减且凸的，在 $[1, +\infty]$ 内 $f'(x) < 0$ ， $f''(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 单减且凹的。列表如下：

x	0	(0, 1)	1	(1, +∞)
f'(x)	0	-	-	-
f''(x)	-	-	0	+
y = f(x) 的图形	极大		拐点	

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则图形有一条水平渐近线 $y = 0$ 。

(5) $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ，故有极大值点 $x = 0$ ，极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$ ，故有拐点 $(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}e})$ 。

(6) 绘图，注意图形关于 y 轴对称。

例 2，作函数 $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图形。

解：(1) 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

(2) $f'(x)$ ， $f''(x)$ 的零点与不存在点为 $x_1 = 3$ $x_2 = -1$ ，将 $f(x)$ 的定义域 D 分成 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, +\infty)$ ，讨论 $f'(x)$ ， $f''(x)$ 在各区间上的单调性与凹凸性等，讨论

如下：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	+	+	+
$f(x)$ 的图形	凸增	极大 -2	凸减	凹减	极小 0	凹增

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \infty$ ，故 $x=1$ 是铅直渐近线

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \frac{1}{4}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - \frac{1}{4}x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+9}{4(x-1)} = -\frac{5}{4}$

所以 $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ 是斜渐近线。

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = +\infty$ 而

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = -\infty$

(5) 作图：

通过上面两例的讲解， 我们应该明了对于一般显函数的作图方法， 而对隐函数与参数方程决定的函数，我们应类比而作。

例 3，作函数 $\begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = t(t^2 - 2) \end{cases}$ 的图形。

解：（1）显然 $x \geq -2$ ， $-\infty < y < +\infty$ ， x 是 t 的偶数， y 是 t 的奇函数，即在 $t = t_0$

与 $t = -t_0$ ， x 对应的值相同，而 y 值的绝对值相同符号相反，表明图形关于 x 轴对称，因此我们只须讨论 $t \geq 0$ 的情形。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 2}{2t} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{3t^2 - 2}{2t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2 - 2}{2t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 2}{3t^3}$$

(2) 当 $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时 $\frac{dy}{dx} = 0$ ，当 $t = 0$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 不存在， $\frac{d^2y}{dx^2}$ 也不存在，所以得曲线的驻

点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}})$ ，且当 $0 < t < \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时 $\frac{dy}{dx} < 0$ ，曲线单调下降，当 $t > \sqrt{\frac{2}{3}}$ 时 $\frac{dy}{dx} > 0$ ，

故曲线单增，当 $t > 0$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ，即曲线是凹的。

(3) 作图

三、弧微分

定义 1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上具有一阶连续的导数, 则称曲线 $y = f(x)$ 在 I 上是一条光滑曲线。

设 $y = f(x)$ 为光滑曲线, 取 $M_0(x_0, f(x_0))$ 为弧的起点, 以 x 增加的方向为曲线的方向,

在曲线上的任一点 $M(x, y)$ 规定有向线段 M_0M 的值为 s 如下: s 的绝对值为这段弧的长度,

当有向弧段 M_0M 的方向与曲线 s 正向一致时 $s > 0$, 相反时 $s < 0$, 从而 s 是 $s(x)$, 且为单调增加函数。

以下求 $s'(x)$ 与 ds 。

设 $X, x + \Delta x \in I$ 在 $f(x)$ 上对应点 M, M' , 弧长对应的增量 $\Delta s = MM'$ 于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{MM'}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{MM'}{|MM|}\right)^2 \frac{|MM|^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{MM'}{|MM|}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \\ &= \left(\frac{MM'}{|MM|}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{\left(\frac{MM'}{|MM|}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right)}$$

$$\text{由于 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{MM'}{|MM|} = \lim_{M \rightarrow M'} \frac{MM'}{|MM|} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

$$\text{所以 } \frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{MM'}{|MM|}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\text{由于 } s = s(x) \text{ 是单调增加函数, 于是有 } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{即 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx。$$

$$\text{还有 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\text{若曲线 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \text{则 } ds = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} dt$$

四、曲率

直线 $y = kx + b$, k 表示直线的斜率。

曲线弯曲的程度用什么来表示呢, 比较下面的弧段, 我们自己得出结论。

(1) 相同长度的弧段, 切线转角大的较为弯曲。

(2) 转角相同时，切线转过弧段较长的不如较短的弯曲。

定义 2. 设光滑曲线 C 上弧段 AB 的长为 l, 切线的转角为 α , 则称 $\bar{K} = \left| \frac{\alpha}{l} \right|$ 为弧段 AB

为平均曲率。若当点 B 沿曲线 C 趋于 A 点时, $\lim_{l \rightarrow 0} \bar{K} = \lim_{l \rightarrow 0} \left| \frac{\alpha}{l} \right|$ 存在, 则称此极限值为曲线 C

在点 A 的曲率, 记为 K, 即 $K = \lim_{l \rightarrow 0} \left| \frac{\alpha}{l} \right|$ 。例如直线由于 α 为 0, 故 $K = 0$, 与“直线不弯”

相一致。

例 4. 求以半径为 R 的圆的曲率。

解: $l = \alpha R$

$$K = \lim_{l \rightarrow 0} \left| \frac{\alpha}{l} \right| = \lim_{l \rightarrow 0} \left| \frac{\alpha}{R \alpha} \right| = \frac{1}{R} \quad (\text{常数})$$

规定:

(1) 曲线的正向是 x 增大的方向;

(2) 以 A 为计算弧长的起点

(3) AB 上取一点 M, 记 AM 的长为 s, 则切线的倾角 α 是 s 的函数, 则

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| \quad \text{而 } \tan \alpha = y' \text{ 故 } \alpha = \arctan y'$$

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx, \quad K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \frac{\frac{y''}{1 + y'^2} dx}{\sqrt{1 + y'^2}} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{于是 } d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\text{参数方程 } L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$$K = \frac{|\varphi \varphi'' - \varphi' \psi'|}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}$$

例 5. 铁路弯曲线, 用 $y = \frac{x^3}{3}$ 作为过渡曲线, 计算点 $(0, 0)$ $(1, \frac{1}{3})$ $(3, 9)$ 处铁路的曲率。

$$\text{解: } y' = x^2 \quad y'' = 2x \quad \text{故 } K = \frac{2x}{(1 + x^4)^{3/2}}$$

由此得到求 (0, 0) 处 $K_0 = 0$

$$\text{在 } (1, \frac{1}{3}) \text{ 处 } K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 在 } (3, 9) \text{ 处 } K_2 = \frac{2}{41\sqrt{82}}$$

例 6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

$$\text{解: } y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b \quad y'' = 2a$$

$$K = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}}$$

所以当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, K 最大, 且此时 $K = 2a$ (顶点处 K 最大。)

五、曲率圆

设 $y = f(x)$ 在 $M(x, y)$ 处曲率为 $K (K \neq 0)$, 在点 M 处曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $DM = \frac{1}{K} = q$, 以 D 为圆心, q 为半径作圆, 称此圆为曲线在点 M 的曲率圆, q 叫做曲线在点 M 处的曲率半径。

例 6. 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2$, 现在要用砂轮磨削内表面, 试用直径多大的砂轮才比较合适。

解: 顶点处曲率最大, 半径最小

$$y' = 0.8x \quad y'' = 0.8$$

$$y|_{x=0} = 0 \quad y'|_{x=0} = 0.8$$

$$\text{由上式 } K = 0.8 \quad q = \frac{1}{K} = 1.25$$

所以选用的砂轮半径不超过 1.25 单位长, 半径为 2.5 单位长。

第七讲 习题课

教学目的与要求: 通过小结内容、订正练习、举例讲解和自行练习, 使学生巩固和加深对本章内容的理解, 并熟知几个解题的思路, 使对本章内容做到融汇贯通习题手到擒来。

教学内容: 复习微分中值定理与导数应用

重点: 微分中值定理, 及不等式的证明

难点: 不等式的证明

授课方式: 讲练结合

教学思路: 通过批改作业, 了解到学生的薄弱之处, 从而在小结内容, 练习举例时加重复习。据以往经验, 利用微分中值定理做题, 证明不等式及单调性的运用都应予加强。

教学过程:

内容小结：

一、订正作业（另外在练习册上有准备）

二、复习小结本章内容：

1. Rolle、Lagrange、Cauchy 及 Taylor 定理。

2. L Hospital 法则；

3. 函数的极值，函数单调性的判定和函数凹凸性的判定，函数图形的拐点及其求法，渐近线、描绘图形，最大最小值的求法。

4. 平面曲线的切线方程与法线方程。

例题讲解：

（一）填空

1. 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是 $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1)$ ；法线方程

$$y - \frac{\pi}{4} = -2(x - 1)$$

$$\text{解： 因为 } y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} \text{ 且当 } x=1, y = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{所以切线： } y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\text{法线： } y - \frac{\pi}{4} = -2(x - 1)$$

2. 当 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 时，函数 $y = x2^x$ 取得极小值。

$$\text{解： } y' = 2^x(1 + x \ln 2) \quad y' = 2^x \ln 2(2 + x \ln 2)$$

$$\text{令 } y' = 0 \text{ 有唯一驻点 } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

$$y'' \Big|_{x = -\frac{1}{\ln 2}} = 2^{-\frac{1}{\ln 2}} \ln 2 > 0$$

故当 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ ， $y = x2^x$ 取得极小值。

3. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的向上凸区间是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$\text{解： } y' = -2xe^{-x^2} \quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \text{ 令 } y'' < 0 \text{ 得 } -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$

$$\text{解： 令 } y' = 1 - 2\sin x = 0 \text{ 得在 } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 上的驻点 } x = \frac{\pi}{6}, y|_{x=0} = 2, y|_{x=\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3},$$

$$y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以最大值为 } y \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

(二) 选择

1. 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$ 、 $f'(1)$ 、 $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 ()

- (A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$
 (C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

解: 选择 (B) 因为 $f(1) - f(0) = f'(\xi)$ ($0 < \xi < 1$) 又 $f''(x) > 0$, 故 $f'(x)$ 单调增, 所以 $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$ 。

2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
 (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解: 选择 (B), 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 于是存在 $x = 0$ 某邻域 $f''(x) > 0$, 从而 $(0, f(0))$ 不为拐点, 因而 (C) 是错的。

又由拉氏定理 $f'(x) - f'(0) = f''(\xi)x$ 即 $f'(x) = f''(\xi)x$

ξ 介于 0 与 x 之间, 从而 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, $x > 0$, $f'(x) > 0$ 所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 故选 B。

3. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有 ()

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

解: 选择 (B)。

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$ 故有铅垂渐近线; 而 $x \rightarrow +1^-$ $y \rightarrow \frac{\pi}{2}e$ $x \rightarrow 1$ 时 y 的极限的不存在, 无别的铅垂渐近线; ; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{\pi}{4}$ $\therefore y = \frac{\pi}{4}$ 为其水平渐近线; 无斜渐近线。

(三) 求解题

1. 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小, 并求出该最小值。

解: 如图所示, $SC = h$ $OC = OD = r$ $BC = R$

因为 $\frac{BC}{SC} = \frac{OD}{SD}$ 故 $\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$ 从而 $R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}$, 于是圆锥体为

$$V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^3}{h-2r} \quad (2r < h < +\infty)$$

$$\text{令 } V'(h) = \frac{\pi r^2 h^2 - 4rh}{3(h-2r)^2} = 0 \qquad h = 4r \qquad h = 0 \text{ (舍去)}$$

由于圆锥最小体积一定存在，故 $h = 4r$ 是 $V(h)$ 在 $(2r, +\infty)$ 的惟一驻点，所以 $h = 4r$ 时 V 取最小值。

$$V(4r) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(4r)^2}{(4r-2r)} = \frac{8\pi r^3}{3}$$

2. 设 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

- (1) 求函数的增减区间及极值
- (2) 求函数图象的凹凸区间及拐点
- (3) 求渐近线
- (4) 作出其图形

解：(1) 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y = x + \frac{4}{x^2}$

$y' = 1 - \frac{8}{x^3}$ 驻点 $x=2$ ，不可导点 $x=0$

$y'' = \frac{24}{x^4}$ $x=0$ 为 y'' 不存在的点。所以

(2)

X	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	-	0	+
y''	+	+		+
y			极小值 $f(2) = 3$	

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x^3} = +\infty$ $\therefore x = 0$ 为铅垂渐近线

又 $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^3 + 4}{x^2} - x) \Rightarrow 0$

所以 $y = x$ 为其斜渐近线。

(4) 零点为 $x = -\sqrt[3]{4}$ 且作图：

(四) 证明题

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, C]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在 $(0, C)$ 内单减， $f(0) = 0$ ，试应用 Lagrange 定理证明 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$

其中常数 a, b 满足条件 $0 \leq a \leq b \leq a + b \leq c$

证明：当 $a=0$ 时 $f(0) = 0$ $f(a + b) = f(b) = f(a) + f(b)$

当 $a>0$ 时 在 $[0, a]$ 和 $[b, a+b]$ 上分别应用 Lagrange 定理

$$f'(\xi_1) = \frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{f(a)}{a} \quad \xi_1 \in (0, a)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(a+b) - f(b)}{a+b-b} = \frac{f(a+b) - f(b)}{b} \quad \xi_2 \in (b, a+b)$$

显然 $0 < \xi_1 < a \leq b < \xi_2 < a+b \leq c$, 因 $f'(x)$ 在 $(0, c)$ 上单调, 故 $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$
从而 $\frac{f(a+b) - f(b)}{a} \leq \frac{f(a)}{a}$, 因为 $a > 0$ 所以有 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ 。

2. 证明不等式 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$

证: 设 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1+x^2}$ 则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

$x=0$ 为其驻点, 由于 $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$, 可知 $x=0$ 为极小值点

即为最小值 $f(0)=0$, 故对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \geq 0$

即 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ 。

3. 证明不等式 $\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x} \quad (0 < x < +\infty)$

证明: $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \quad 0 < x < +\infty$ 有

$$f'(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}] = 0$$

可见 $\forall x \in (0, +\infty) \quad f(x) > 0$ 即

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$$

以上三种证明不等式的方法, 用中值定理, 最小最大值以及单调性性质。也具有普通意义, 希望学生借鉴。

4. 求证方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中, p, q 为常数, 且 $0 < q < 1$ 。

证明: 令 $f(x) = x + p + q \cos x$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

一定 $\exists b$ 使得 $f(b) > 0$, $\exists a$ 使得 $f(a) < 0$ 。由介值定理可见 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 至少存在一个实根。

因为 $f'(x) = 1 - q \sin x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单增, 所以 $f(x)=0$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 内至多有一个实根。从而 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根。

(五) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶导数连续, 且点 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 之拐点。求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

解: 原式 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2}$$

$$= f''(a) = 0$$

(六) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶导数连续, 且 $f(0) = 0$, 对于函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

- 1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;
- 2) 证明对确定的 a 值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一阶导数连续。

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

故定 $a = f'(0)$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

$$\text{又 } x \neq 0 \quad g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

$$\text{即 } g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{f''(0)}{2} & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x) + f'(x) - f'(x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0)$$

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一阶导数连续。

第五章 不定积分

第一讲 不定积分的概念与性质

教学目的与要求：理解原函数与不定积分的概念，了解不定积分的几何意义，掌握不定积分的性质，熟记基本积分公式。

知识点：原函数与不定积分的概念，原函数存在定理，原函数的性质，不定积分的几何意义及应用，不定积分的性质及应用，基本积分表。

教学重点：原函数与不定积分的概念；不定积分的性质；基本积分公式。

教学难点：不定积分的概念及几何意义；基本公式的熟记。

教学方式：讲授、练习、辅之以多媒体手段。

教学思路：首先使学生理解有关基本概念，然后在此基础上进行一定量练习。

一、复习引导

复习导数概念、几何意义及物理意义。引导学生思考：已知瞬时速度 $v(t)$ ，如何求位移函数 $s(t)$ ，由此引入新课。

二、新课讲授

(一) 原函数

1. 概念 [多媒体演示]

定义 5.1 设函数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ，如果对任意 $x \in I$ ，存在函数 $F(x)$ ，使 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有如下关系：

$$F'(x) = f(x) \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x) dx$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 内的一个原函数，简单地说成“ $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数”。

例：因 $(\sin x)' = \cos x$ ， $(\sin x + c)' = \cos x$ (c 为常数)， $(\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$ ($x \in (0, +\infty)$)，

所以 $\sin x$ ， $\sin x + c$ (c 为常数) 是 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的原函数； $\ln x + 1$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的原函数。

2. 原函数的存在性 [多媒体演示]

定理 5.1 (原函数存在定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，则在该区间内存在可导函数 $F(x)$ ，使对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ ，简言之，连续函数一定有原函数。

[口头强调] 以后在谈到一个函数 $f(x)$ 的原函数时，总是对 $f(x)$ 的一个连续区间而言。如果 $f(x)$ 有间断点，其原函数应按 $f(x)$ 的连续区间分段考虑。

3. 原函数的性质 [多媒体演示]

定理 5.2 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，即 $F'(x) = f(x)$ ，那么在区间 I 上 $f(x)$ 的所有原函数都可以表示成 $F(x) + c$ 的形式，其中 c 为任意常数。

证：设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，即对任一 $x \in I$ ，有 $G'(x) = f(x)$

则 $[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

所以 $G(x) - F(x)$ 为一常数。令 $G(x) - F(x) = c$ (常数)

则有 $G(x) = F(x) + c$

定理 5.2 的要点 [口述]：第一，如果 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$ ，则 $f(x)$ 有无穷多个原函数 $F(x) + c$ (c 为任意常数)，且所有原函数都在形如 $F(x) + c$ 的函数之中，即， $f(x)$ 的全体原函数所组成的集合，就是函数族 $\{F(x) + c \mid -\infty < c < +\infty\}$

第二，要求 $f(x)$ 的所有原函数，只要找出它的一个原函数 $F(x)$ 即可，其他原函数与 $F(x)$ 只相差一个常数。

(二) 不定积分

1. 概念 [多媒体演示]

定义 5.2 在区间 I 内的函数 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x) + c$ (c 为任意常数)，称为 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分，记作 $\int f(x)dx$ ，即

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \text{ 为任意常数})$$

其中符号“ $\int$ ”称作积分号， $f(x)$ 称作被积函数， $f(x)dx$ 称作被积表达式， x 称作积分变量， c 称作积分常数。

注：① 不定积分所表示的不是一个函数，而是一族函数；

② 以后一般不再注明不定积分的适用区间，而理解为对被积函数的连续区间而言；

③ 如果一个函数在区间 I 上不定积分存在，就称 $f(x)$ 在 I 上可积，并称求不定积分的运算叫积分法。

2. 几何意义 [多媒体演示]

不定积分 $\int f(x)dx$ 在几何上表示为 $f(x)$ 的积分曲线族 (如右图)。

解释 [口述]：函数 $f(x)$ 的任一原函数 $y = F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，

$y = F(x) + c$ ($= \int f(x)dx$) 表示无穷多条积分曲线，这些曲线称为 $f(x)$ 的积分曲线族，其中任何一条积分曲线即可由另一条积分曲线沿 y 轴方向向上或向下平移适当位置而得到，并且任何一条积分曲线在点 x 的切线斜率都等于 $f(x)$ 在该点的函数值，即在该点所有积分曲线的切线彼此平行。

例 [板书] 设曲线过点 $(0, 2)$ ，且其上任一点切线的斜率等于该点横坐标的 2 倍，求此曲线方程。

解：设所求曲线方程为 $y = f(x)$ ，则由题意知， $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，即有 $f'(x) = 2x$ ，

$$\text{故 } f(x) = \int 2x dx = x^2 + c$$

而 $f(x)$ 过点 $(0, 2)$ 即 $f(0) = 2$ ，将 $x = 0$ ， $y = 2$ 代入 $y = x^2 + c$ ，得 $c = 2$

$$\text{所以 } y = f(x) = x^2 + 2$$

3. 不定积分的性质 [多媒体演示]

性质 1 $(\int f(x)dx)' = f(x)$ 或 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

性质 2 $\int f'(x)dx = f(x) + c$ 或 $\int d f(x) = f(x) + c$

[利用不定积分定义给出简单证明]

注意：求导与积分虽互为逆运算，但交换运算顺序会使结果相差一个常数。

性质 3 设 α, β 是不全为零的常数，则 $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

[注： α, β 全为 0，则上述等式不成立，此时，左端 $= \int 0 dx = c$ （任意常数），而右端 $= 0 \int f(x) dx + 0 \int g(x) dx = 0$ 。该性质可推广到三个以上函数的情形]。

性质的应用：

例 1 求 $\int [(x+1)^2 - 2\cos x] dx$

分析：要求将原题的被积函数进行变形，再利用上述三条性质，容易求出原函数的基本函数的积分。

$$\begin{aligned} \int [(x+1)^2 - 2\cos x] dx &= \int (x^2 + 2x + 1 - 2\cos x) dx \\ \text{解：} \quad &= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int 1 dx - 2 \int \cos x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 + x - 2\sin x + c \end{aligned}$$

注：在分项积分后，每个不定积分的结果本应都加上一个积分常数，但因为任意常数的和仍然是任意常数，所以只要在最后的结果中加上一个任意常数即可。另外， $\int 1 dx$ 常记为 $\int dx$ 。

4. 基本积分表 [多媒体演示]：见教材 P130

强调：结合求导公式，在理解的条件下熟记。

5. 求积分举例

[目的：巩固积分公式及性质；思路：把被积函数化为基本积分公式中某被积函数形式之一，再用公式算出不定积分]。

例 2 求 $\int 2^x \cdot 5^x \cdot e^x dx$

解：因为 $2^x \cdot 5^x \cdot e^x = (10e)^x$ ，由公式 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ 得

$$\int 2^x \cdot 5^x \cdot e^x dx = \int (10e)^x dx = \frac{(10e)^x}{\ln(10e)} + c = \frac{10^x e^x}{\ln 10 + 1} + c$$

例 3 求 $\int \left[\frac{1}{x^3 \sqrt{x}} - \sqrt{x \sqrt{x}} \right] dx$

$$\text{解：} \int \left[\frac{1}{x^3 \sqrt{x}} - \sqrt{x \sqrt{x}} \right] dx = \int x^{-\frac{4}{3}} dx - \int x^{\frac{3}{4}} dx = -3x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$$

[上述两例是通过简单变形即可利用积分公式的情形。有时需要用到稍多一些代数变形技巧]。

例 4 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$

解：原式 $= \int \frac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \ln x + \arctan x + c$

[技巧总结：先适当组合，后分解]

例 5 求 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$

解：
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left[\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right] dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x + \tan x = c \end{aligned}$$

例 6 求 $\int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} dx$

解：原式 $= \int \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right] dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \int \cot t \csc t dt = -\frac{1}{2} \cot t + \frac{1}{2} \csc t + c$

[技巧总结：先用三角函数公式变形，然后分解]

例 7 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

解：
$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} dx = \int (x^2-1 + \frac{1}{1+x^2}) dx \\ &= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan x + c \end{aligned}$$

[技巧总结：分子添项减项，然后分解]

三、本课小结

原函数与不定积分的概念与性质；基本积分公式。

课外练习：

1. 思考题：原函数与不定积分两概念有何联系与区别？

第二讲 基本积分法（一）

教学目的与要求： 牢固掌握第一类积分换元法， 比较熟练地应用该方法进行相关积分计算。

知识点： 第一类换元法（凑微分法）公式及应用。

教学重点： 第一类换元法的基本思路——凑微分的理解与应用

教学难点： 一般积分计算过程中的灵活凑微分， “ $\varphi(x)$ ” 的选择。

教学方式： 讲授、练习。

教学思路： 在使学生深入理解公式的基础上，进行大量的练习。

一、复习

1. 原函数与不定积分的概念与性质

2. 基本积分公式

3. 思考：等式 $\int \cos 5x = \sin 5x + c$ 成立吗？[由此引导学生进入新课]

$$\therefore (\sin 5x + c)' = 5\cos 5x \neq \cos 5x$$

$\therefore$ 上述等式不成立。由于 $(\frac{1}{5}\sin 5x + c)' = \cos 5x$ ，所以 $\int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\sin 5x + c$ 或

$$\int 5\cos 5x dx = \sin 5x + c, \text{ 即}$$

$$\int \cos 5x = \frac{1}{5} \int \cos(5x) d(5x) \xrightarrow{\text{令 } u=5x} \frac{1}{5} \int \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + c \xrightarrow{u=5x} \frac{1}{5} \sin 5x + c$$

二、新授

(一) 第一类换元法基本公式

定理（第一类换元法）设函数 $\varphi(x)$ 在所考虑的区间内可微，又 $\int f(u) du = F(u) + c$

$$\text{则有 } \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + c$$

证：由条件得 $dF(u) = f(u) du$ ，根据微分形式的不变性得

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)] d\varphi(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$$

$$\text{由不定积分的定义有 } \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + c$$

[第一类换元法的基本思路是将不定积分的被积表达式凑成一个函数的微分，所以通常也称为凑微分法。解题过程中的步骤可串联为如下变换形式：

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)$$

$$\xrightarrow{\text{令 } \varphi(x) = u} \int f(u) du = F(u) + c$$

$$\xrightarrow{\text{令 } u = \varphi(x)} F[\varphi(x)] + c$$

一般情形，被积函数中的“ $\varphi(x)$ ”没有明显写出，依赖于观察得出。如果被积函数中至少含有单一复合函数，就可以试探性地将复合部分的函数看作“ u ”作一变换或者将被积函数凑成 $f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ 的形式，进而利用上述公式计算积分。

(二) 第一换元法的应用实例

1. 典型例子

$$\text{例 1 } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\text{解： } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \xrightarrow{x+1=u} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u + c = \arctan(x+1) + c$$

$$\text{例 2 求 } \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$\text{解： } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} \xrightarrow{\frac{x}{a}=u} \frac{1}{a} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan u + c \xrightarrow{u=\frac{x}{a}} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

[上述两题的被积函数是分式，且分母中 x 的次数为 2，显然适合于用公式（4），即

$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctgu + c$ 。变形过程应紧扣这条主线，把被积表达式写成 $\frac{d\phi(x)}{1+[\phi(x)]^2}$ 的形式，故有上述变形]。

在熟练了以后，中间变量过程可不写出。

例 3 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a > 0$)

[分析：此积分与 $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ 同型，故应设法向此方向变形]

$$\text{解：} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

例 4 求 $\int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$

[分析：此积分与 $\int \operatorname{ch} u du$ 同型，可考虑令 $\frac{x}{a} = u$]

$$\text{解：} \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} d(\frac{x}{a}) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} + c$$

例 5 求 $\int \frac{x}{(1+x)^4} dx$

[分析：令 $u = 1+x$ ，则 $(1+x)^{-4} = u^{-4}$ 为 u 的幂函数]

$$\begin{aligned} \text{解：} \int \frac{x}{(1+x)^4} dx &= \int \frac{x+1-1}{(1+x)^4} dx = \int \left[\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+x)^4} \right] dx \\ &= \int \frac{d(x+1)}{(1+x)^3} - \int \frac{d(x+1)}{(1+x)^4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^3} + c \end{aligned}$$

[有时，当 $\phi(x)$ 确定以后，其他部分看不出该如何变形，则可如下计算：

令 $u = 1+x$ ，则 $x = u-1$ ， $dx = du$ ，从而

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(1+x)^4} &= \int \frac{(u-1)du}{u^4} = \int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4} \right) du = -\frac{1}{2} \cdot u^{-2} + \frac{1}{3} u^{-3} + c \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^3} + c \end{aligned}$$

例 6 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$

[分析：基本公式中没有直接与本题相同的类型。但该被积函数的分母可分解为一次函数之积，可考虑先分解，然后再仿例 5 进行凑微分]

解：由于 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$ ，所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \cdot \left[\int \frac{1}{x-a} - \int \frac{1}{x+a} \right] dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right] \\
 &= \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|] + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c
 \end{aligned}$$

[小结：上述几例中，用到如下形式的积分（ $a \neq 0$ ）：

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b)d(ax+b) \xrightarrow{u=ax+b} \frac{1}{a} \int f(u)du]$$

例 7 求 $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$

[分析：此题较难。被积函数的分母中有 $(x \ln x)^2$ ，若令 $x \ln x = u$ ，则可求出]

解：令 $u = x \ln x$ ，则 $du = d(x \ln x) = (x \cdot \frac{1}{x} + \ln x)dx = (1 + \ln x)dx$ ，从而

$$\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{x \ln x} + c$$

例 8 求 $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$

解： $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + c$

例 9 求 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$

[分析：被积函数中有“ $\frac{1}{x}$ ”及“ $\ln x$ ”， $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ，故可考虑令 $u = \ln x$]

解： $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} = \int \frac{d \ln x}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln|1+2\ln x| + c$

上述各例中，用到如下积分形式：

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + c$$

2. 被积函数为三角函数式的积分

[在计算这种积分的过程中，要用三角函数恒等式进行变形]

例 10 $\int \tan x dx$

解： $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$

[类似可有 $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$]

例 11 $\int \cos^3 x dx$

解： $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

[思考： $\int \cos^5 x dx = ?$, $\int \sin^5 x dx = ?$]

例 12 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

解：

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d \sin x$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c$$

例 13 求 $\int \cos^2 x dx$

解：

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} (\int dx + \int \cos 2x dx)$$

$$= \frac{1}{2} (\int dx) + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 4x + c$$

例 14 求 $\int \cos^4 x dx$

解：

$$\because \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\therefore \int \cos^4 x dx = \int \frac{3}{8} dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

[例 11-14 是形如下式的积分： $\int \sin^m x \cos^n x dx$ (m, n 为正整数或零)]

当 m, n 中有一个是奇数时，则用例 11, 12 类似的方法利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 及 $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ 等关系凑微分；当 m, n 全为偶数时，用公式 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

及 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ 两公式进行降幂，最终化为 $\int \cos kx dx$ 的积分计算]。

例 15 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx$

解：

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

[一般，形如 $\int \cos mx \cos nxdx$ ， $\int \sin mx \cos nxdx$ ， $\int \sin mx \sin nxdx$ 的积分，需用积化和差公式变形]

例 16 求 $\int \csc x dx$

解 1：

$$\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\tan \frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

解 2：

$$\int \csc x dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{-d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{d(\cos x - 1)}{\cos x - 1} - \int \frac{d(\cos x + 1)}{\cos x + 1} \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$$

解法 3：见教材 P135

例 17 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \tan x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d(\sec x) \\ \text{解：} &= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) d(\sec x) \\ &= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + c\end{aligned}$$

三、本课小结

在第一类换元法中，选择变量代换 $u = \varphi(x)$ ，没有一般规律。要求：熟记基本积分公式，多做练习。

第三讲 基本积分法（二）

教学目的与要求： 牢固掌握第二类换元法与分部积分法， 能比较熟练地应用这两类方法进行相关积分计算。

知识点： 第二类换元积分法，分部积分法的有关公式及应用。

教学重点： 第二类换元积分法与分部积分法的理解与应用。

教学难点： 分部积分法的恰当应用，“ $u(x)$ ”与“ $v(x)$ ”的正确选择。

教学方式：讲授、练习

教学思路：首先使学生对基本公式有较透彻地理解， 然后在此基础上进行一定量的练习。

一、复习

1. 基本积分公式；

2. 第一类换元法： $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F[\varphi(x)] + c$

二、新授

（一）第二类换元法

1. 公式

定理 2 （第二类换元法）设 $x = x(t)$ 是单调可导的函数，并且 $x'(t) \neq 0$ 。

若 $\int f[x(t)] x'(t) dt = G(t) + c$

则 $\int f(x) dx = G(t(x)) + c$

其中 $t = t(x)$ 为 $x = x(t)$ 的反函数。

证：由假设， $G'(t) = f[x(t)] x'(t)$ ，且函数 $x = x(t)$ 有连续可导的反函数 $t = t(x)$ 。利用复合函数和反函数的求导法则，有

$$\frac{d}{dx} G(t) = \frac{dG}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[x(t)] \cdot x'(t) \cdot \frac{1}{x'(t)} = f[x(t)] = f(x)。证毕$$

利用第二类换元法计算积分的思路可写成：

$$\int f(x) dx \stackrel{x=x(t)}{=} \int f(x(t)) x'(t) dt = G(t) + ct \stackrel{t=t(x)}{=} G(t(x)) + c$$

[第一、二类换元法的主要区别：第一换元法从 $u = \varphi(x)$ 出发且以 $u = \varphi(x)$ 结束， $\varphi(x)$ 可没有反函数；而第二换元法由 $x = x(t)$ 出发到 $t = t(x)$ 结束， $x = x(t)$ 与 $t = t(x)$ 互为反函数。在第一换元法中， u 是中间变量， x 是自变量，而在第二换元法中， x 与 t 的中间变量与自变量的地位是变化的。]

2. 应用实例

[一般来说，对于被积函数含有根式的不定积分，可通过引入适当的第二类换元法去掉根号]

例 1 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

[分析：欲去掉根号，显然可令 $x = t^2$ 。为使函数单调可取 $t \geq 0$]

解：令 $x = t^2$ ($t \geq 0$) 则 $dx = 2t dt$ ，从而

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &\stackrel{x=t^2}{=} \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2t - 2\ln|1+t| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

[当取 $t < 0$ 时，有同样的结果：此时 $t = -\sqrt{x}$]

例 2 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$)

[分析：欲去掉根号，需使 $a^2 - x^2 = a^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$ 成为一个完全平方，只需 $1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$ 成为一个完全平方，为此，令 $\frac{x}{a} = \sin t$ (或 $\cos t$) 即可]

解：令 $x = a \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ，则所给变换为可逆的：且 $t = \arcsin \frac{x}{a}$ ， $-a \leq x \leq a$ ，

$dx = a \cos t dt$ ， $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ ，所以

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 t \right) + c$$

而 $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$ ，所以

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

[当令 $x = a \cos t$ 时，应取 $0 \leq t \leq \pi$]

例 3 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ($a > 0$)

[分析：令 $a^2 + x^2 = u^2$ ，则 $1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2$ ，由三角函数恒等式 $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ 可令

$\frac{x}{a} = \tan t$ ，即 $x = a \tan t$]

解：令 $x = a \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)，则 $dx = a \sec^2 t dt$ ， $t = \arctan \frac{x}{a}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{\sqrt{a^2+a^2 \tan^2 t}} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + c$$

而 $\tan t = \frac{x}{a}$, $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$, 所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \left| \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right| + c = \ln(\sqrt{a^2+x^2} + x) + c_1 \quad (c_1 = c - \ln a)$$

注 1: 本例还可以利用公式 $1+\operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$, 令 $x = a \operatorname{sh} t$ 也可得出同样的结果。

注 2: 类似可推出: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |\sqrt{x^2-a^2} + x| + c$

[小结: 当被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时, 可作代换 $x = a \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) 或

$x = a \cos t$ ($0 < x < \pi$) 代去根式; 当被积函数含有根式 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时, 可作代换 $x = a \tan t$

代去根式; 当被积函数含有根式 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, 可作代换 $x = a \sec t$ 代去根式。]

其他例子——倒数变换:

例 4 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$

解: 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 当 $t > 0$ 时

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} &= \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} \\ &= -\int \frac{d(t+1)}{\sqrt{2^2-(t+1)^2}} = -\sin \frac{t+1}{2} + c = -\arcsin \frac{x+1}{2x} + c \end{aligned}$$

当 $t < 0$ 时, 有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = \arcsin \frac{x+1}{2x} + c$$

3. 积分公式的总结与增补, 教材 P137: (16) — (24)。

(二) 分部积分法

1. 分部积分公式

定理 3 如果 $u = u(x), v = v(x)$ 都是可微函数, 则

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

也可写为 $\int u dv = uv - \int v du$

证: 由乘积的求导公式, 有

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ 或 } uv' = (uv)' - u'v$$

从而 $\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u'v dx = uv - \int u'v dx$ 。证毕

[注：应用分部积分公式的思路是：当被积表达式形如 $uv' dx$ 时，若原积分难于求出，但 v 及 $\int u' v dx$ 均可求出，则采用上述公式计算。使用该公式，关键是如何选择函数 u 和 v 。

有两点值得坚持：① v 容易求出；②积分 $\int v du$ 比 $\int u dv$ 容易计算。]

2. 基本例题

例 5 求 $\int x \sin x dx$

[分析：若令 $x = u$ ， $\sin x = v'$ ，则 $u' = 1$ ， $v = -\cos x$ ， $\int v du = \int (-\cos x) dx = -\int \cos x dx$ 比 $\int u dv = \int x \sin x$ 容易]

解：设 $u = x$ ， $v' = \sin x$ ，则 $u' = 1$ ， $v = -\cos x$ ，从而

$$\begin{aligned} \int x \sin x &= \int u v' dx = uv - \int v du = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

[注：要令 $u = \sin x$ ， $v' = x$ ，则 $\int v du = \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$ 比 $\int u dv$ 更难， u, v 的选取不当。]

例 6 求 $\int x^2 e^x dx$

解：设 $u = x^2$ ， $dv = e^x dx$ ，则 $du = 2x dx$ ， $v = e^x$ ，从而

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

上式右边第二个积分比原积分简单—— x 的幂降低了一次。再计算 $\int x e^x dx$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

所以 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$ ($c_1 = -2c$)

[小结：一般地，设 $p(x)$ 是多项式，求 $\int p(x) \sin kx dx$ ， $\int p(x) \cos kx dx$ 及 $\int p(x) e^{kx} dx$ 时 (k 是常数)，通常取 $u = p(x)$ ，这样可使多项式的幂数降低一次。熟悉以后， u, v 可不写出。]

例 7 求 $\int \arcsin x dx$

解：设 $u = \arcsin x$ ， $dv = dx$ ，则 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ， $v = x$ ，于是

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

例 8 求 $\int 4x^3 \arctg x dx$

$$\begin{aligned}\text{解: } \int 4x^3 \arctan x dx &= \int \arctan x d(x^4) = \arctan x \cdot x^4 - \int x^4 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x^4 \arctan x - \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = x^4 \arctan x - \frac{1}{3} x^3 + x - \arctan x + c\end{aligned}$$

[小结：一般地，设 $p(x)$ 是多项式，求 $\int p(x)f(x)dx$ ， $\int p(x)g(x)dx$ 时，其中 $f(x)$ 是最后一步运算为对数运算的复合函数， $g(x)$ 是最后一步运算为反三角运算的复合函数，通常选取 $u = f(x)$ 或 $u = g(x)$ ，而 $dv = p(x)dx$ 。]

例 9 求 $\int e^x \sin x dx$

$$\text{解: } \int e^x \sin x dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x - \int (-\cos x)e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

而 $\int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx$ 所以

$$\int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x e^x dx$$

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

[小结：一般地，如果被积函数是指数函数与三角函数的乘积形式，则可任意指定指数函数或三角函数为 u 。在使用分部积分法时，有时会出现积分还原的情况，此时通过移项与原积分合并得出结果，即由 $\int f(x) = F(x) + k \int f(x)dx$ ($k \neq 1$) 有 $\int f(x) = \frac{1}{1-k} F(x) + c$ 。]

例 10 求 $\int \tan^2 x \sec x dx$

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec x dx &= \int \tan x d \sec x = \tan x \sec x - \int \sec x d \tan x \\ &= \tan x \sec x - \int \sec x \sec^2 x dx = \tan x \sec x - \int \sec x (\tan^2 x + 1) dx \\ &= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x dx - \int \sec x dx \\ &= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x dx - \ln |\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int \tan^2 x \sec x dx = \frac{1}{2} [\tan x \sec x - \ln |\sec x + \tan x|] + c$$

3. 其他典型例题

① 利用分部积分建立某些积分的递推公式

例 11 求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) 的递推公式

解：过程见书：

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right] \quad (n > 1)$$

例 12 求 $I_n = \int \sin^n x dx$ ($n > 2, n \in \mathbb{N}$) 的递推公式

解：过程见书： $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x$

[类似有 $\int \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x$]

② 其他利用分部积分知识求解的题型：

例 13 设 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$ ，求 $\int x f'(x) dx$

分析：初见这种题，以为由 $(\frac{\sin x}{x})' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = f(x)$ ，再对 $f(x)$ 求导，代入

$\int x f'(x) dx$ 直接计算。这很难行得通，况且计算相当复杂。适于应用分部积分法。

解： $\int x f'(x) dx = \int x df(x) = xf(x) - \int f(x) dx = xf(x) - \frac{\sin x}{x} + c$

而 $f(x) = (\frac{\sin x}{x})' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ，所以代入上式得

$\int x f'(x) dx = \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + c$

例 14 求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

解： $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} d(t^2) = - \int \arcsin t d(\sqrt{1-t^2}) = -2\sqrt{1-t^2} \arcsin t + 2 \int dt$
 $= -2\sqrt{1-t^2} \arcsin t + 2t + c = -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$

三、本课小结

本课主要学习了第二类换元法及分部积分法，要求在深刻领会公式的基础上，加强练习。

课后练习：

1. 补充作业

① $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ ； ② $\int (\arcsin x)^2 dx$

③ $\int \frac{(\ln x)^3}{x^2} dx$ ④ $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} dx$ ⑤ $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

第四讲 几类特殊初等函数的积分

教学目的与要求：会求有理函数、三角函数有理式以及简单无理函数的积分。

知识点：有理函数、三角函数有理式以及简单无理函数不定积分的计算方法。

教学重点：有理函数不定积分的计算。

教学难点：有理式分解为最简分式之和的有关理论；无理函数的积分。

教学方式：讲授、练习。

教学思路：先讲授有理函数分解为最简分式之和的有关理论，然后讲授有理函数不定积分，三角函数有理式及简单无理函数不定积分的计算方法。

一、复习

1. 基本积分公式；
2. 不定积分的换元法及分部积分公式。

二、新授

(一) 有理函数的积分

1. 最简真分式的积分

① 最简真分式；形如 $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (A, B, a 为常

数, $A \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $p^2 - 4q < 0$) 的分式称为 x 的最简真分式。

② 最简真分式的积分：

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + c; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{1-k} (x-a)^{1-k} + c \quad (k \neq 1);$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{A(x+\frac{p}{2}) + B - \frac{Ap}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} dx \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c \end{aligned}$$

$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$ 可仿上配方，整理，再利用上一课时关于 $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ 的递推公式算出。

2. 一般有理函数的分解

定理 任一有理函数 $\frac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$ 、 $q(x)$ 均是 x 的多项式) 总可以表示成一个整式与

前文提到的最简真分式之和。

[注：①分母 $q(x)$ 中如有因式 $(x-a)^k$ ，则分解后有下列 k 个最简真分式之和：

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}; \quad \text{其中 } A_1, \dots, A_k \text{ 均为实常数};$$

②分母 $q(x)$ 中如有因式 $(x^2+px+q)^k$ ($p^2 - 4q < 0$)，则分解后有下列 k 个部分分式之

和： $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$ ，其中 M_i, N_i 都是常数。

例 1 化真分式 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ 为最简真分式之和

解： $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$ ，设 $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

其中 A, B 是待定常数，在等式两边同乘 $(x-2)(x-3)$ ，得

$$x+3 = A(x-3) + B(x-2)$$

比较等式两边 x 的系数和常数项，有

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

从而 $A=-5, B=6$ ，故有

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

[注：得出 $x+3 = A(x-3) + B(x-2)$ 之后，也可采用赋值法确定 A, B ：令 $x=2$ ，得 $5 = A(2-3) \Rightarrow A=-5$ ；令 $x=3$ ，得 $6 = B(3-2) \Rightarrow B=6$]

例 2 将分式 $\frac{x^6-3x^5+4x^4-3x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 分解成多项式与最简分式之和

解：用多项式除法可得

$$x^6-3x^5+4x^4-3x^3+3x^2-x+1 = (x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x) + x^3+1$$

所以原分式 $= x^2+1 + \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$

而令 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$

两边去分母得 $x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$

令 $x=0$ 得 $A=-1$ ；令 $x=1$ 得 $B=2$ ；比较两端 x^3 和 x^2 项系数，得

$$\begin{cases} A+D=1 \\ -3A+C-2D=0 \end{cases} \Rightarrow C=1, D=2$$

所以 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$ ，从而有

$$\text{原式} = x^2+1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

3. 有理函数的不定积分计算

步骤：①分解为最简分式与多项式之和；②计算各最简分式与多项式的积分。

例 3 求 $\int \frac{x^6-3x^5+4x^4-3x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$

解：由例 2 得

$$\begin{aligned}\text{原积分} &= \int \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x - \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c\end{aligned}$$

例 4 求 $\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)} dx$

解：令 $\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$ ，去分母得

$$x+4 = A(x^2+x+3) + (Bx+C)(x-1)$$

用赋值法或比较系数法可得 $A=1, B=C=-1$ ，即有

$$\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+3} dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+3}$$

而
$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+3) + \frac{1}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{11}} + c$$

所以 $\int \frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)} dx = \ln|x| - \ln(x^2+x+3) + \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{11}} + c$

(二) 三角函数有理式的积分

1. 三角函数有理式的概念

由三角函数及常数经过有限次四则运算所得到的式子称为三角函数有理式，记作 $R(\sin x, \cos x)$ ，其中 $R(u, v)$ 表示 u, v 两个变量的有理式。

2. 三角函数有理式积分的一般求法 —— 万能变换法

令 $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ， $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ， $x = 2\arctan t$ ， $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ，从而有

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

上式右端被积函数是 t 的有理式，即三角函数有理式的积分，总可以通过万能变换化成有理函数的积分。

例 5 求 $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

解：设 $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5+3\cos x} &= \int \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{8+2t^2} = \int \frac{dt}{4+t^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$

3. 特殊三角函数有理式积分

① 当被积函数为 $R(\sin x)\cos x$ 时, 可令 $\sin x = t$; 当被积函数为 $R(\cos x)\sin x$ 时, 可令 $\cos x = t$, 其中 $R(u)$ 为 u 的有理式。

例 6 求 $\int \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} dx$

解:
$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} dx &= \int \frac{d \sin x}{\sin x + \sin^2 x} \stackrel{\sin x = t}{=} \int \frac{dt}{t + t^2} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c = \ln \left| \frac{\sin x}{\sin x + 1} \right| + c\end{aligned}$$

② 当被积函数为 $R(\tan x)$ 或 $R(\cos^2 x, \sin^2 x)$ 时, 令 $\tan x = t$, 则

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \int R(\tan x) dx &= \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2}, \quad \int R(\cos^2 x, \sin^2 x) dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{dt}{1+t^2}\end{aligned}$$

例 7 求 $\int \frac{2dx}{3-\cos^2 x}$

解:
$$\begin{aligned}\int \frac{2dx}{3-\cos^2 x} &= \int \frac{2\sin^2 x + 2\cos^2 x}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{2\tan^2 x + 2}{3\tan^2 x + 2} dx \\ &= \int \frac{2t^2 + 2}{3t^2 + 2} \cdot \frac{dt}{t^2 + 1} = \int \frac{2}{3t^2 + 2} dt = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}} + c = \frac{\sqrt{6}}{3} \arctan \frac{\sqrt{6} \tan x}{2} + c\end{aligned}$$

(三) 简单的无理函数的积分

[一般的无理函数的积分计算没有一般方法, 我们仅介绍两类特殊无理函数:]

$R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 及 $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的积分]

1. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \quad (a \neq 0)$

令 $t = \sqrt[n]{ax+b}$, 则 $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}dt}{a}$, 于是, 原不定积分化为如下关于 t 的有理函数的积分:

$$\int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \cdot \frac{nt^{n-1}dt}{a}$$

例 8 求 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

解：这里 $\sqrt[n]{ax+b} = \sqrt{x}$ ，从而 $t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt$

$$\int \frac{dt}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{2tdt}{(1+t)t} = 2 \int \frac{dt}{1+t} = 2\ln|1+t| + c \\ \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$$

例 9 求 $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} dx$

分析：这里有两个根式 $\sqrt{x+1}$ 与 $\sqrt[3]{x+1}$ ，由于 2 与 3 的公倍数为 6，故 $\sqrt{x+1} \notin \sqrt[6]{x+1}^3$ ，

$\sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2$ ，可令 $t = \sqrt[6]{x+1}$ ，则 $\sqrt{x+1} = t^3$ ， $\sqrt[3]{x+1} = t^2$

解：令 $t = \sqrt[6]{x+1}$ ，则 $x = t^6 - 1$ ， $dx = 6t^5 dt$ ，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{t^6 - 1}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int (t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)t^3 dt \\ = 6 \left[\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right] + c \\ = 6 \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{9} + \frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{8} + \frac{(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{x+1}{6} + \frac{(x+1)^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{4} \right] + c$$

2. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$

令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 即可仿照上面的积分进行计算。

例 10 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$

解：令 $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ ，则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ ， $dx = \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt$ ，从而

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx = \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt \\ = 2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \\ = -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \ln \left[x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1 \right)^2 \right] + c$$

课堂练习：

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx & \quad [\text{答案: } \ln \left| \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2} \right| + c] \\ \textcircled{2} \int \frac{x-1}{2x^2+x-1} dx & \quad [\text{答案: } -\frac{1}{6} \ln |2x-1| + \frac{2}{3} \ln |x+1| + c] \\ \textcircled{3} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx & \quad [\text{答案: } \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 4\ln|1+x| - 3\ln|x-1| + c] \\ \textcircled{4} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} & \quad [\text{答案: } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) \right| + c] \\ \textcircled{5} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} & \quad [\text{答案: } \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c] \\ \textcircled{6} \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}} & \quad [\text{答案: } 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c] \\ \textcircled{7} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx & \quad [\text{答案: } \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c] \end{aligned}$$

三、本课小结：

本次课学习了有理函数、三角函数有理式以及简单无理函数的积分法。

第五讲 不定积分习题课

教学目的与要求： 使学生在前几课时新授的基础上， 进一步理解与不定积分有关的概念和性质，掌握进行不定积分计算的各种方法与技巧，为下一章定积分的学习打下基础。

知识点： 有关不定积分的所有概念与方法。

教学重点： 不定积分的概念、性质与积分法。

教学难点： 积分的各种技巧的灵活应用。

教学方式： 讲授、练习。

教学思路： 先进行本章有关概念、方法的复习，然后进行一定量的练习。

一、复习

1. 原函数与不定积分的概念与性质；基本积分表；
2. 原函数与不定积分的几何意义；
3. 第一类积分换元法；
4. 第二类积分换元法；
5. 分部积分法；
6. 有理函数积分法；
7. 三角函数有理式的积分法；
8. 简单无理函数的积分法。

二、纠错

针对本章中学生作业中出现的普通性问题进行讲解，纠正出现的错误，并分析出错的原因。

三、课堂练习

计算下列积分：

1. $\int \frac{dx}{x(x^{10}-2)}$ [答案： $\frac{1}{20} \ln \left| \frac{x^{10}-2}{x^{10}} \right| + c$]

2. $\int \frac{\ln(1-x) - \ln x}{x(1-x)} dx$ [答案： $-\frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1}{x}-1\right) \right]^2 + c$]

3. $\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$ [答案： $\frac{\sin x}{x} + c$]

4. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$ [答案： $\ln \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} + c$]

5. $\int \frac{x^4}{(1+x^2)^2} dx$ [答案： $\frac{2x^3+3x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2} \arctan x + c$]

6. $\int \frac{e^x}{x} (1+x \ln x) dx$ [答案： $e^x \ln x + c$]

7. $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$ [答案： $x + \ln \left| \frac{x}{1+xe^x} \right| + c$]

8. $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$ [答案： $e^{\sin x} (x - \sec x) + c$]

9. $\int [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^2 dx$ [答案： $x[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^2 - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + c$]

10. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ [答案： $\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$]

11. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [答案： $-\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2+2) \arccos x - \frac{1}{9} (x^2+6) + c$]

12. $\int \frac{\cot x}{1+\sin x} dx$ [答案： $-\ln(\csc x + 1) + c$]

学生先进行独立练习，然后酌情给予下列提示：

1. 令 $t = x^{10} - 2$ ；

2. 令 $t = \ln \frac{1-x}{x} = \ln(1-x) = \ln x$ ；

3. $\left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ；

4. 原积分 $= \int \frac{1+e^x - e^x}{(1+e^x)^2} dx$ ；

$$5. \int \frac{x^4}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{x^2 - 1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \text{ 第一个积分可直接计算, 第二}$$

个积分可令 $x = \tan t$

$$6. \text{ 原积分} = \int \frac{e^x}{x} dx + \int e^x \ln x dx \quad \text{而} \quad \int \frac{e^x}{x} dx = \int e^x d \ln x = e^x \ln x - \int e^x \ln x dx$$

$$7. \text{ 令 } t = 1 + xe^t$$

$$8. \text{ 原积分} = \int x e^{\sin x} \cos x dx - \int e^{\sin x} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \text{ 分别利用分部积分法计算两个积分}$$

$$9. u = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^2, \quad dv = dx, \text{ 进行分部积分}$$

$$10. u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}, \text{ 进行分部积分}$$

$$11. u = \arccos x, \quad dv = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx, \text{ 分部积分}$$

$$12. \text{ 原积分} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x + \sin^2 x}$$

第六章 定积分

第一讲 定积分的概念与性质

教学目的与要求：理解定积分的概念及几何意义，掌握定积分的性质。

知识点：定积分的定义，定积分的几何意义，定积分的性质，定积分存在的条件。

教学重点：定积分的定义及性质。

教学难点：定积分的定义。

教学方式：讲授

教学思路：由实例引入定积分的定义及几何意义，在此基础上进一步研究定积分的性质。

教学过程：

一、导入新课

1. 曲边梯形的面积；

2. 变速直线运动的路程。

上述两问题都与同样的数学问题有关，由此引进定积分的定义。

二、新课讲授

(一) 定积分的定义

定义：设函数 $y = f(x)$ 在给定区间 $[a, b]$ 上有定义且有界，在 $[a, b]$ 上任意插入 $n-1$ 个分

点 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, 满足: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ 将 $[a, b]$ 分成 n 个子区间

$[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \dots, n)$, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为每一个子区间的长度。在每一个

子区间上任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 并作和式: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 记

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 若极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此极限值称为区

间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

其中 x 称为积分变量, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, $[a, b]$ 称为积分区间,

a 称为积分下限, b 称为积分上限, $\int$ 称为积分号, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分和。

[注: 上述定义中极限式 (1) 式存在是指不管怎样划分区间 $[a, b]$, 也不管怎样在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上选取 ξ_i , 极限式 (1) 都存在且相等, 此极限值就是定积分 $\int_a^b f(x)dx$, 也就是说定积分与区间 $[a, b]$ 的划分及 ξ_i 的取法无关。

如果用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 语言, 定积分的定义表达如下:

设有常数 A , 如果对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对于区间 $[a, b]$ 的任意分法, 不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中怎样选取, 只要 $\lambda < \delta$, 总有 $\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。

关于定积分概念的两点说明:

(1) 定积分的值仅取决于被积函数与积分区间 $[a, b]$, 而与积分变量的记号无关, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) 规定: 若 $a > b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; 若 $a = b$, 则 $\int_a^b f(x)dx = 0$

(二) 定积分存在的条件:

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。

定理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。

例 1 试用定义计算 $\int_0^1 x^2 dx$ 。

解：因为被积函数 $f(x) = x^2$ 在积分区间 $[0, 1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积，故该积分与区间 $[0, 1]$ 的划分法及点 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的取法无关。为便于计算，不妨把 $[0, 1]$ 分成 n 等分，分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)。这样，每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，取 $\xi_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} = \frac{1}{n}$ ，当 $\lambda \rightarrow 0$ 时， $n \rightarrow +\infty$ ，从而由定积分定义得

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

(二) 定积分的几何意义

由定积分的定义知，定积分具有如下几何意义：

如果在 $[a, b]$ 上， $f(x) \geq 0$ ，则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$ ，两条直线 $x = a$ ， $x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积。

如果在 $[a, b]$ 上， $f(x) \leq 0$ ，积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示由 $y = f(x)$ ， $x = a$ ， $x = b$ 与 x 轴围成的曲边梯形面积的反数。

当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可正可负时，如果约定在 x 轴上方图形面积为正，在 x 轴下方的图形面积为负，则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的几何意义是介于直线 $x = a$ ， $x = b$ ， $y = f(x)$ 及 x 轴之间的图形面积的代数和。

例 2 试根据定积分的几何意义求积分 $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$ 的值

解：显然，根据定积分的定义求解本题的积分是比较困难的。现根据定积分的几何意义，把定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 看作图 4 所示的半径为 1 的圆在第一象限部分的面积，所以

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} (\pi \cdot 1^2) = \frac{\pi}{4}$$

思考题： $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$ ，为什么？

(四) 定积分的性质（假设各积分均存在）

性质 1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i$$

证：

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

性质 2 $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数)

[性质 1、2 可合为 $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ (α, β 为常数) 且可推广到函数个数多于两个的情形。]

性质 3 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

这个性质叫做定积分关于积分区间具有可加性，其中 c 可在 [a, b] 内也可在 [a, b] 外。证略。

性质 4 (矩形性质) 如果在区间 [a, b] 上，恒有 $f(x) = c$ (c 是常数)，则

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a)。$$

特别地 $\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b-a。$

性质 5 如果在区间 [a, b] 上， $f(x) \geq 0$ ，则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

性质 6 若在区间 [a, b]， $f(x) \geq g(x)$ ，则 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

证：因为 $f(x) \geq g(x)$ ，所以 $f(x) - g(x) \geq 0$ ，由性质 5 得

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0$$

再由性质 1 即得 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

性质 7 (估值定理) 设 M 和 m 分别是函数在区间 [a, b] 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

证：对任意 $x \in [a, b]$ ，因 $m \leq f(x) \leq M$ ，由性质 6 知，有

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

再由性质 4 即得要证的不等式。

例 3 估计积分 $\int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$ 的数值范围。

解：令 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $x \in [1, 2]$ 则 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$ ($x \in [1, 2]$) 故 $f(x)$ 在 [1,

2] 上单调递减，从而 $\frac{2}{5} = f(2) \leq f(x) \leq f(1) = \frac{1}{2}$ ，从而

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5}(2-1) \leq \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx \leq \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$$

例 4 估计 $\int_1^2 e^{-x^2} dx$ 的数值范围。

解：先求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值： $m = f(2) = e^{-4}$, $M = f(1) = e^{-1}$,

即 $e^{-4} \leq f(x) \leq e^{-1}$ $x \in [1, 2]$ 从而由性质 7 得

$$3e^{-4} = e^{-4}(2-1) \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq e^{-1}(2-1) = \frac{1}{e}$$

性质 8 (定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b) \quad (2)$$

证：因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以在 $[a, b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m , 根据性质 7

可知 $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ 。

令 $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 则 $m \leq \mu \leq M$, 根据闭区间上连续函数的介值定理, 在 $[a, b]$

上至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = \mu$, 即 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 亦即 (2) 成立。

中值定理的几何意义：设 $f(x) \geq 0$, 则在 $[a, b]$ 上至少有一点 ξ , 使曲边梯形面积

$\int_a^b f(x) dx$ 与以 $f(\xi)$ 为高, $b-a$ 为底的矩形的面积相等。

三、课堂小结

本次课主要学习了定积分的概念、几何意义以及 8 条性质。

四、思考题

有人在证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ 时, 使用积分中值定理, 得

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{\theta^n}{1+\theta} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^n}{1+\theta} = 0$ ($0 < \theta < 1$), 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

请问这个证明对不对? 如果不对, 给出正确证明方法。

第二讲 微积分基本公式

教学目的与要求：理解变上限定积分是其上限的函数及其求导定理, 掌握牛顿—莱布尼兹公式。

知识点：变上限定积分及其导数求法；微积分基本公式。

教学重点： 变上限定积分及其导数求法；微积分基本公式。

教学难点： 变上限定积分及其导数求法。

教学方式： 讲授、练习

教学思路： 由变速直线运动路程问题及用定义计算定积分的困难引入新课， 循序渐进讲授微积分基本公式。

教学过程：

一、复习引导

1. 定积分的定义、几何意义及性质；

2. 指出由定义进行定积分计算是相当困难的；需寻找新的计算方法；

3. 设物体以速度 $V=V(t)$ ($V(t) \geq 0$) 作直线运动，物体从时刻 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 这段时间

所经过的路程为 $S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt = S(t_2) - S(t_1)$ 。

此计算方法是否具有一般性？

由此引入新课。

二、新课讲授

(一) 积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积， $x \in [a, b]$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上可积。定积分 $\int_a^x f(t) dt$ 对每一个取定的 x 值都有一个对应确定的值。记

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

称 $\Phi(x)$ 是积分上限 x 的函数，简称关于 $f(x)$ 的积分上限函数，也称变上限的函数或变上限的定积分。

2. 积分上限函数的可导性及求导公式

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续， $x \in [a, b]$ ，则积分上限函数

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在点 x 处可导，且它的导数为 $\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$ 。

证：当上限 x 获得增量 Δx 时，积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 的相应增量为

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

因为 $f(t)$ 在 $[x, x + \Delta x]$ 上连续，根据定积分中值定理，有 $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x$

其中， $\xi \in [x, x + \Delta x]$ ，这时 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$ ，令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，则 $\xi \rightarrow x$ ，从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

即 $\Phi'(x) = f(x)$

[这个定理表明, 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限函数是可导函数, 而且是 $f(x)$ 的一个原函数, 从而得到连续函数必存在原函数的结论。另外, 上述定理初步揭示了积分学中定积分与原函数之间的联系]。

由积分上限求导公式及复合函数求导的链式法则, 有

推论: 若 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 是 x 的可导数, $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $a \leq \varphi(x) \leq b$, $a \leq \psi(x) \leq b$, 则有

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \varphi'(x);$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f(\varphi(x)) \varphi'(x) - f(\psi(x)) \psi'(x)$$

证: 令 $\Phi(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$, $u = \varphi(x)$, 则有

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\Phi}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

从而①得证:

$$\text{又因为} \quad \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt - \int_a^{\psi(x)} f(t) dt$$

再由①式, 可证得②。

例 1 求下列函数的导数:

$$(1) \quad \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt; (2) \quad \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt; (3) \quad \int_0^{x^2} x^2 \sin t^2 dt$$

$$\text{解: } (1) \quad \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{1+x^2}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt = e^{\cos^2 x} (-\sin x) - e^{\sin^2 x} \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} x^2 \sin t^2 dt = \frac{d}{dx} (x^2 \int_0^{x^2} \sin t^2 dt) = x^2 (\int_0^{x^2} \sin t^2 dt)' + (x^2)' \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$$

$$(3) \quad = x^2 \sin x^4 \cdot 2x + 2x \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$$

$$= 2x^3 \sin x^4 + 2x \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$$

例 2 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明: $\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt$ 。

证: 设 $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt$, $G(x) = \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)(x-t)dt = \frac{d}{dx} \int_0^x xf(t)dt - \frac{d}{dx} \int_0^x tf(t)dt$$

$$\text{则} \quad = \frac{d}{dx} [x \int_0^x f(t)dt] - \frac{d}{dx} \int_0^x tf(t)dt$$

$$= xf(x) + \int_0^x f(t)dt - xf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt$$

故 $F'(x) = G'(x)$ 所以 $F(x) = G(x) + c$ (c 为常数), 而 $F(0) = G(0) = 0$, 用 $x = 0$ 代入 $F(x) = G(x) + c$, 得 $0 = 0 + c$, $c = 0$, 所以 $F(x) = G(x)$ 原式成立。

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{\sin x \tan x}$

解：这是一个 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 应用 L' Hospital 法则计算。因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim \tan x \sim x$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{\sin x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-\cos^2 x} (-\sin x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x} \sin x}{2x} = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

(二) 微积分基本公式

1. 微积分基本公式

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任意一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \square \quad F(x) \Big|_a^b$$

此公式也称牛顿—莱布尼兹 (Newton—Leibniz) 公式。

证：因为 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 由定理 1 可知, $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数, 于是这两个原函数只差一个常数, 即

$$\Phi(x) = F(x) + c \quad \text{或} \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) + c$$

在上式中令 $x = a$, 得 $0 = F(a) + c$ 即 $c = -F(a)$

所以 $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得 $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

[这个公式深刻地揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分的内在联系, 它把求定积分的问题转化为求被积函数的原函数问题, 且只要求出被积函数的任何一个原函数, 则这个原函数在积分上、下限处的函数值之差就是所求定积分的值。这就为我们计算定积分提供了一个简便而有效的方法。]

例 4 求下列定积分：

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (2) $\int_{-4}^2 \frac{1}{x} dx$; (3) $\int_1^3 |x-2| dx$

解：(1) 由 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数, 由公式得：

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(2) 当 $x < 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 的原函数为 $\ln|x|$, 所以

$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-4}^{-2} = \ln 2 - \ln 4 = -\ln 2$$

(3) 被积函数 $|x-2|$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的积分须分区间计算, 令 $x-2=0$ 得 $x=2$, 故

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |x-2| dx &= \int_{-1}^2 |x-2| dx + \int_2^3 |x-2| dx \\ &= \int_{-1}^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx \\ &= 2(2+1) - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 - 2(3-2) = 5 \end{aligned}$$

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ e^{-x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 。

解: $f(x)$ 是分段函数, 在 $[-1, 1]$ 上有界, 且只有一个第一类间断点 $x=0$, 故定积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 存在。根据定积分的性质, 有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 e^{-x} dx \end{aligned}$$

而在 $[-1, 0]$ 上, $f(x) = x^2$ 连续, 故 $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$, 对于 $\int_0^1 f(x) dx$,

若修正定义, $f(0) = f(0+0) = 1$, 则在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 也连续, 且 $f(x) = e^{-x}$, 故

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1}$$

故 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + 1 - e^{-1} = \frac{4}{3} - e^{-1}$ 。

[注: 可积函数改变它在积分区间端点的函数值, 积分值是不会改变的。事实上, 因为积分与区间的分法及点 ξ_i 的取法无关, 所以只要不取区间的端点为 ξ_i , 积分和便与区间端点的函数值无关, 因而积分值也与区间端点的函数值无关。]

补例 1 指出下列运算中有无错误? 错在何处?

① $(\int_0^{x^2} \sqrt{t+1} dt)' = \sqrt{x^2+1}$; (应为 $\sqrt{x^2+1} \cdot 2x$)

② $\int_0^{x^2} (\frac{d}{dt} \sqrt{t+1}) dt = \sqrt{x^2+1}$; (应为 $\sqrt{t+1} \Big|_0^{x^2} = \sqrt{x^2+1} - 1$)

③ $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$; ($\frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上无穷间断)

④ $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$; ($\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$)

补例 2 利用定积分计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}{n}$$

$$\text{解：原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin x\pi dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

补例 3 当 x 为何值时，函数 $f(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ 有极值。

解： $f'(x) = xe^{-x^2}$ ，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ ，而 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$ ； $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，故 $x = 0$ 时 $f(x)$ 有极小值

三、课堂小结：

本次课讲授了微积分基本公式，它是进行定积分计算的基本工具。

第三讲 定积分的换元积分法与分部积分法

教学目的与要求： 牢固掌握定积分的换元积分法与分部积分法， 能较为熟练地进行相应的计算。

知识点： 定积分的换元积分法与分部积分法。

教学重点： 两种积分的深刻理解与应用，注意 “换元必换限”。

教学难点： 两种积分法的灵活、正确应用

教学方式： 讲授、练习

教学思路： 先使学生正确而深刻地理解两种方法的基本思想， 在此基础上进行大量练习。

教学过程：

一、复习

(一) 定积分的定义；

(二) 牛顿 — 莱布尼兹公式：若 $F'(x) = f(x)$ ， $x \in [a, b]$ ，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(三) 不定积分的换元积分法

二、新授

(一) 定积分的换元积分法

1. 基本公式

定理 1 设：(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续；(2) 函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 或 $[\beta, \alpha]$ 上是单值的且有连续导数；(3) 当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 或 $[\beta, \alpha]$ 上变化时， $x = \varphi(t)$ 的值在 $[a, b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha) = a$ ， $\varphi(\beta) = b$ ，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (*)$$

证：因为 $f(x)$ 、 $\varphi(t)$ 、 $\varphi'(t)$ 均为连续函数，所以 $f(x)$ 及 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 都有原函数。设 $F(x)$

是 $f(x)$ 的一个原函数，则由微积分基本公式，有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

又 $\frac{d}{dt} F[\varphi(t)] = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ ，可知 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 的一个原函数，则由微积分基本公式，有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

所以原等式成立。

[公式 (*) 叫做定积分的换元公式。该公式表明，虽然定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 中的 dx 是整个定积分记号不可分割的一部分，但在一定条件下，它确实可以作为微分记号来对待。这就是说，应用换元公式时，如果把 $\int_a^b f(x) dx$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$ ，则 dx 就换成 $\varphi'(t) dt$ ，而 $\varphi'(t) dt$ 是 $x = \varphi(t)$ 的微分 dx 。]

注：(1) 用 $x = \varphi(t)$ 把原来的积分变量 x 替换成新积分变量 t ， x 的积分限也要换成新变量 t 的积分限，即“换元必换限”；

(2) 当求出 $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必像计算不定积分那样再把 $\Phi(t)$ 换成原来的变量 x ，而只要把新变量 t 的上、下限分别直接代入 $\Phi(t)$ 中，再相减即可。

2. 应用举例

例 1 求 $\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (a > 0)$

解：设 $x = a \sin t$ ，则 $dx = a \cos t dt$ ，当 $x = 0$ 时， $t = 0$ ；当 $x = a$ 时， $t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt$$

于是

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

[公式 (*) 也可以反过来使用，即：如果 $t = \varphi(x)$ ， $\alpha = \varphi(a)$ ， $\beta = \varphi(b)$ ，则

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

例 2 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$

解：设 $t = \cos x$ ，则 $dt = -\sin x dx$ ，当 $x = 0$ 时， $t = 1$ ；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $t = 0$

$$\text{则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_1^0 t^5 dt = - \frac{t^6}{6} \Big|_1^0 = \frac{1}{6}$$

[也可不明显写出新变量 t ，此时不要变更定积分的上、下限：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d \cos x = - \frac{\cos^6 x}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}]$$

例 3 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

解：由于 $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x} |\cos x|$ ，在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上， $|\cos x| = \cos x$ ，在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上，

$|\cos x| = -\cos x$ ，所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d \sin x \\ &= \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

例 4 求 $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

解：因 x 的变化区域是 $[-2, -1]$ ，所以我们作变量替换 $x = -\sec t$ ， t 的变化域可限为 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 。

当 $x = -2$ 时， $t = \frac{\pi}{3}$ ；当 $x = -1$ 时， $t = 0$ 。又 $dx = -\sec t \tan t dt$ ，所以

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \left[-\frac{\tan t}{\sec t} \right] (-\sec t \tan t) dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \tan^2 t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (\sec^2 t - 1) dt = (\tan t - t) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

例 5 证明 (1) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

证：因为 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ ，对 $\int_{-a}^0 f(x) dx$ 作变量替换 $x = -t$ ，则得

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

从而 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx$

(1) 当 $f(x)$ 为偶函数时， $f(-x) = f(x)$ ，故 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时， $f(-x) = -f(x)$ ，故 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

[例 5 可作为一个定理，用来简化定积分的计算]

例 6 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1)^{20} \sin^3 x dx$ 及 $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

解：该两积分的区间均为对称区间，且被积函数均为奇函数，故两个积分值均为

0

例 7 计算 $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ($a > 0$)

解：原积分 $= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ ，上式右端第一个积分的被积函数是偶函

数，第二个积分的被积函数是奇函数，而积分区间 $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ 是对称区间，所以

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\pi a}{3}$$

例 8 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，证明

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx, \text{ 特别地 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 并由此计算 } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

证：(1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$ ，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\frac{\pi}{2} - t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

特别地，令 $f(x) = x^n$ 在 $[0, 1]$ 上连续，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

(2) 设 $x = \pi - t$ ，则

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)] dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt \end{aligned}$$

移项整理即得： $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ 。

由上述结论知：

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

例 9 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1 < x < 0 \end{cases}$ ，计算 $\int_1^4 f(x-2) dx$

解：设 $x-2=t$ ，则 $dx=dt$ ，且当 $x=1$ 时， $t=-1$ ；当 $x=4$ 时， $t=2$

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\ \text{从而} \quad &= \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(二) 分部积分法

定理 2 设 $u(x)$, $v(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

证略。

例 10 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ 。

$$\begin{aligned}\text{解: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\end{aligned}$$

例 11 求 $\int_0^1 \arcsin x dx$ 。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{解: } &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

例 12 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ 。

解: 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 且当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = 1$ 时, $t = 1$

$$\text{故 } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^t \cdot 2t dt = 2 \int_0^1 te^t dt.$$

再由分部积分公式, 有 $\int_0^1 te^t dt = \int_0^1 t de^t = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = 1$ 。

$$\text{所以 } \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2.$$

例 13 已知 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(\pi) = 1$, $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$, 求 $f(0)$

解: 由于 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \sin x dx$ 对上式第二个积分

用分部积分法, 有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f''(x) \sin x dx &= \int_0^{\pi} \sin x df'(x) = f'(x) \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \cos x dx \\
 &= - \int_0^{\pi} \cos x f'(x) dx = - \int_0^{\pi} \cos x df(x) \\
 &= - \cos x f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx \\
 &= f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx
 \end{aligned}$$

所以 $3 = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} f''(x) \sin x dx = 1 + f(0) \quad \therefore f(0) = 2$

例 14 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$ 。

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\
 &= (n-1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \right] \\
 &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
 \end{aligned}$$

解：

所以 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ，此即关于 n 的递推公式。

当 n 为奇数时， $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1$ 。

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$ ， $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ，所以

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ，所以对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 也有相同结果。

例 14 计算 $I = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$

解：设 $x = \sin t$ ，则

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 (x^2 - 1)^n dx = 2(-1)^n \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \\
 &= (-1)^n \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t dt = (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot (2n)!}{(2n+1)!!}
 \end{aligned}$$

补例：① $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$ [提示：令 $t = 5-4x$ ，答案： $\frac{1}{6}$]

② $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$ [提示：令 $x = a \sin t$ ；答案： $\frac{a^4 \pi}{16}$]

③ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ [提示：令 $x = \tan t$ ，答案： $\frac{\sqrt{2}}{2}$]

④ $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ [提示：原积分 $= \int_{\frac{1}{e}}^e (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx$ ，答案： $2(1-\frac{1}{e})$]

三、课堂小结：

本次课学习了定积分计算的换元积分法与分部积分法，是进行定积分计算的主要方法。

第四讲 广义积分

教学目的与要求：了解广义积分概念，会进行广义积分计算

知识点：无穷积分的概念及性质；瑕积分的概念及性质；广义积分的计算方法

教学重点：广义积分的计算

教学难点：广义积分的概念

教学方式：讲授、练习

教学思路：回顾定积分的定义，引入广义积分的定义，讲授广义积分的计算方法

教学过程：

一、复习

回顾定积分的定义，指出这里用上两个条件：①函数有界，②闭区间 $[a, b]$ ，其中任一条件缺少时使成为广义积分；若函数无界，则称为瑕积分；若区间无限时称为无穷积分。

二、新授

(一) 无穷积分

1. 定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，对任意 $b > a$ ，如果极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存在，

则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的无穷积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 。

即 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$

这时，也称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。否则，称它发散或不存在。 [虽然发散积分仍然

采用这个符号，但它已不表示数值概念了。

类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的无穷积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

当且仅当上式右端两个极限都存在时，才认为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的。

在无穷积分收敛时，也可仿照微积分基本公式书写计算过程。如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x) dx &= F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a); \\ \int_{-\infty}^a f(x) dx &= F(x) \Big|_{-\infty}^a = F(a) - F(-\infty); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)\end{aligned}$$

其中， $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ， $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 。

例 1 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

解：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\end{aligned}$$

例 2 计算 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ (n 为正整数)

解： $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x}) = x^n (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} n x^{n-1} dx。$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ，所以 $-x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0$ ，从而

$$I_n = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1}$$

由此递推公式得：

$$I_n = n I_{n-1} = n(n-1) I_{n-2} = \dots = n! \cdot I_0 = n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n! (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = n!$$

例 3 讨论积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x$ 的敛散性

解：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{+\infty} \sin x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \sin x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} (-\cos x) \Big|_b^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} (\cos(b) - 1) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)\end{aligned}$$

上述式子右端两个极限均不存在，故原积分发散。

[也可如下判断：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx &= \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{+\infty} \sin x dx \\ &= (-\cos x) \Big|_{-\infty}^0 + (-\cos x) \Big|_0^{+\infty} \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x - \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x + 1\end{aligned}$$

而上式右端两个极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ 均不存在，所以上式左端的无穷积分发散。]

例 4 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ，当 $p > 1$ 时收敛；当 $p \leq 1$ 时发散

证：当 $p = 1$ 时， $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$ ，发散；

当 $p \neq 1$ 时， $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ 1, & p = 1 \\ p-1, & p > 1 \end{cases}$ ，因此，

当 $p > 1$ 时，无穷积分收敛；当 $p \leq 1$ 时，无穷积分发散。

2. 比较法判断无穷积分的收敛性

上述例 4 可作为某些无穷积分收敛性判别的标准，通过与之比较而确定收敛性。

若当 $x \in [1, +\infty)$ 时， $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$ (M 为常数， $p > 1$)，则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛；

若当 $x \in [1, +\infty)$ 时， $f(x) \geq \frac{M}{x^p}$ ，(M 为常数， $p \leq 1$)，则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

更一般地，设非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，记

$$I_f = \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad I_g = \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

若 $f(x) \leq g(x)$ ($\forall x \in [a, +\infty)$)，则当 I_g 收敛时， I_f 收敛；当 I_f 发散时， I_g 发散。

上述比较判别法也有极限形式，见《高等数学辅导与应试训练》 P223。

例 5 判断广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 的收敛性

解：因为对 $\forall x \in [1, +\infty)$ ， $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ，而 $p = 2 > 1$ ，故 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 收敛。

(二) 瑕积分

瑕积分又称无界函数的广义积分。

1. 定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 a 点的附近无界，如果极限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的瑕积分，记作 $\int_a^b f(x) dx$ ，即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

这里也称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛。否则称该瑕积分发散。

类似地可定义其他瑕积分：

若 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续，而在点 b 的附近无界，定义 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的瑕积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

当极限存在时，称 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；否则为发散。

如果 $f(x)$ 在 $[a, c) \cup (c, b]$ 上连续，而在 c 的邻域内无界，则定义瑕积分

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \end{aligned}$$

仅当上式右端两个极限均存在时，称其左端的瑕积分收敛；否则为发散。

在瑕积分收敛时，可以仿照微积分基本公式写出计算过程，即

① a 为瑕点： $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ，其中 $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ ；

② b 为瑕点： $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ，其中 $F(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ ；

③ c 为瑕点：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= F(x) \Big|_a^c + F(x) \Big|_c^b \\ &= \lim_{x \rightarrow c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x \rightarrow c^+} F(x) \end{aligned}$$

例 6 计算瑕积分 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$)

解： $x = a$ 为 $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 的瑕点，

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow a^-} \arcsin \frac{x}{a} - 0 = \arcsin \frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$$

例 7 讨论 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的敛散性。

解：被积函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上除 $x = 0$ 外连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

故 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{x}) - 1 = \infty$ ，即 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ 发散，故 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ 发散。

注意：一个常犯的错误是忽视 $x = 0$ 是被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 的无穷间断点，而把上述积分当作常

义积分计算，得到如下错误的结果

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2。$$

例 8 证明瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ，当 $p < 1$ 时收敛，当 $p \geq 1$ 时发散

证：当 $p = 1$ 时， $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty$ 。

当 $p \neq 1$ 时， $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p > 1 \end{cases}$

所以，当 $p < 1$ 时原积分收敛；当 $p \geq 1$ 时，原积分发散。

例 8 求 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ 。

解： $x = 1$ 为瑕点，令 $x = \sin t$ ，则 $dx = \cos t dt$ ，于是

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = [\ln |\csc t - \cot t|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

显然，上述瑕积分经换元后化成了常义积分。

三、课堂小结：

本课学习了广义积分的概念及计算方法

第五讲 定积分的几何应用

教学目的要求： 基本掌握定积分的元素法， 会用定积分计算平面图形的面积， 两类特殊几何体的体积以及平面曲线的弧长。

知识点： 定积分的元素法；平面图形面积的计算； 旋转体体积的计算；截面面积已知的几何体体积的计算；平面曲线弧长的计算。

教学重点： 定积分的元素法；平面图形面积的计算，旋转体体积的计算。

教学难点：定积分的元素法； 截面面积已知的几何体体积的计算； 平面曲线弧长的计算。

教学方式： 讲授、演示、练习

教学思路： 先讲授定积分的元素法， 由此导出平面图形的面积、 两种特殊几何体体积以及平面曲线弧长等积分计算公式，再以实例说明公式的运用。

教学过程：

一、复习

1. 定积分的几何意义；
2. 定积分的定义。

二、新授

（一）定积分的元素法

一般地，如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件：

- （1） U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性, 即, 如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$;

那么, 就可考虑用定积分来表示这个量 U , 通常用如下方法(微元法或元素法)来建立所求量 U 的积分式:

(1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量作积分变量, 并确定其变化区间 $[a, b]$;

(2) 在区间 $[a, b]$ 上任取一个小区间 $[x, x+dx]$, 并求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值。如果 ΔU 的近似值可以表示成某连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积, 就把 $f(x)dx$ 称为 U 的元素(或微元), 且记作 dU , 即 $dU = f(x)dx$;

(3) 在整个区间 $[a, b]$ 上以 U 的元素(或微元) $f(x)dx$ 为被积表达式求积分, 就得所求的量: $U = \int_a^b f(x)dx$ 。

(二) 平面图形的面积

1. 直角坐标系中平面图形的面积

设 $f(x), g(x)$ 均为 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(x) \leq g(x)$, 则由曲线 $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ 所围成的平面图形面积(由元素法推出)为

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

一般, 若去掉 $f(x) \leq g(x)$ 的条件, 则应有 $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ 。

类似地, 若平面图形由曲线, $x = \phi(y), x = \psi(y), y = c, y = d$ 围成, 则其面积为

$$A = \int_c^d |\phi(y) - \psi(y)|dy$$

例 1 求由曲线 $y = x^2, y = \sqrt{x}$ 所围成的面积。

解: 作图 3 如右, 易求出两曲线交点坐标为 $O(0, 0)$ 及 $P(1, 1)$, 由上述公式知, 所求面积为 $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}$ 。

例 2 求由抛物线 $y^2 = 2x$ 和曲线 $y = x - 4$ 所围成的面积。

解: $y^2 = 2x$ 与 $y = x - 4$ 的交点坐标为 $P(2, -2)$ 及 $Q(8, 4)$ 。取 y 为积分变量, 则所求面积为 $A = \int_{-2}^4 [y + 4 - \frac{y^2}{2}]dy = 18$ 。若取 x 为积分变量, 则

$$A = \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})]dx + \int_2^8 [\sqrt{2x} - (x - 4)]dx = 18$$

计算较繁。这说明, 应适当选择积分变量, 使计算简单。

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积

解: 因为椭圆关于坐标轴都对称(图 5), 所以所求面积等于图中阴影部分面积的 4 倍,

即有 $A = 4 \int_0^a ydx$, 利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, 代入上式中相当于作变量代换。

此时 $dx = -a \sin t dt$ ，当 $x = 0$ 时， $t = \frac{\pi}{2}$ ；当 $x = a$ 时， $t = 0$ ，所以

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \pi ab$$

一般地，当曲边梯形面积为 $A = \int_a^b f(x) dx$ 时，若 $y = f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，且

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \text{ 则 } A = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt。$$

2. 极坐标系中平面图形的面积

设曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 表示，求由此曲线 $r = r(\theta)$ 及两射线 $\theta = \alpha$ ， $\theta = \beta$ 所围图形的面积（图 6），其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，且 $r(\theta) \geq 0$ 。

用元素法，在 $[\alpha, \beta]$ 中任取一个小角区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 。与这个小区间 $d\theta$ 对应的那部分面积记为 dA （图中阴影部分）。 dA 近似地用半径 $r = r(\theta)$ ，中心角为 $d\theta$ 的扇形面积代替，

$$\text{即 } dA = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

$$\text{从而有 } A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta。$$

例 4 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 所围成的面积。

解：如图 7 所示，此图形关于极轴对称，用 A_1 表示极轴上方那部分面积（图中阴影部分），则所求面积为

$$A = 2A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

例 5 求由圆 $r = \sqrt{2} \sin\theta$ 和双纽线 $r^2 = \cos 2\theta$ 所围成的公共部分的面积 A （图 8）。

解：由对称性，只需求出第一象限部分 $OBPCO$ 的面积。由 $r = \sqrt{2} \sin\theta$ 及 $r^2 = \cos 2\theta$ 得

$\theta = \frac{\pi}{6}$ ，故得两曲线在第一象限的交点 P 的极坐标是 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$ ，于是

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{6} (\pi + 3 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

（三）立体的体积

1. 旋转体的体积

（1）旋转体的概念：一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。这条直线叫做旋转轴。

（2）旋转体体积公式：由微元法推出，由连续曲线 $y = f(x)$ ，直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积为

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx \quad (*)$$

而由 $x = g(y)$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$) 及 y 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体体积为

$$V = \int_c^d \pi g^2(y) dy \quad (**)$$

曲边梯形绕 y 轴旋转而形成的几何体体积为

$$A = \int_a^b 2\pi xy dx \quad (***)$$

例 6 求由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解：先计算绕 x 轴旋转所得的体积 V_1 ，该体积可以看成是由上半椭圆 $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体，由公式 (**) 得

$$V_1 = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

再计算绕 y 轴旋转而成的体积 V_2 。右半椭圆的方程为 $x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ ，由公式 (**) 得

$$V_2 = \pi \int_{-b}^b \left(\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 dy = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

例 7 计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱及 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转而成的旋转体体积。

解：由公式 (*), 所述图形绕 x 轴旋转而成的立体体积为

$$V_1 = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = 5\pi^2 a^3$$

由公式 (***) 所述图形绕 y 轴旋转而成的立体体积为

$$V_2 = \int_0^{2\pi} 2\pi xy dx = \int_0^{2\pi} 2\pi a(t - \sin t) \cdot a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = 6\pi^3 a^3$$

2. 平行截面面积为已知的立体体积

设某立体夹在过点 $x = a$, $x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间 ($a < b$) (图 12), 又设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, $x \in [a, b]$, 取 x 为积分变量, 其变化区间为 $[a, b]$, 立体中相应于任一小区间 $[x, x + dx]$ 的薄片的体积, 近似于 $A(x)dx$, 即 $dA = A(x)dx$, 所以整个立体体积为 $A = \int_a^b A(x)dx$ 。

例 8 求以半径 R 的圆为底, 平行底面且等于底圆直径的线段为顶, 高为 h 的正劈锥体的体积。

解：取底圆所在的平面为 xOy 平面, 圆心 O 为原点, 并使 x 轴与正劈锥体的顶平行, 底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$, 过 x 轴上的点 x ($-R \leq x \leq R$) 作垂直于 x 轴的平面, 截正劈

锥体得等腰三角形的截面。这截面的面积为 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$, 于是所求正劈锥体体

积为 $V = \int_{-R}^R A(x)dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2 h}{2}$ 。

例 9 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 且与底面的夹角为 α , 计算这平面截圆柱体所得立体的体积。

解：取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴, 底面上过圆心, 且垂直于 x 轴的直线为 y

轴。那么，底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ ，立体中过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形，它的两条直角边的长度分别为 y 及 $y \tan \alpha$ ，即 $\sqrt{R^2 - x^2}$ 及 $\sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha$ ，因而截面面积为 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha$ ，所求立体体积为

$$A = \int_{-R}^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

(四) 平面曲线的弧长

1. 平面曲线弧长的概念

设 A, B 是曲线弧上的两个端点，在弧 AB 上任取分点 $A=M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ ，并依次连接相邻的分点得一内接折线，当分点的个数无限增加且每个小弧段都缩向一点时，如果此折线的长 $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧 AB 的弧长，并称此曲线弧 AB 是可求长的。

定理：光滑曲线是可求长的。

2. 平面曲线弧长的计算

设曲线的方程为 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$)，其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数，则由微元法得弧长微元为 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ ，从而所求弧长是 $S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 。

若曲线以参数方程给出：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数，则对弧长计算公式为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

若曲线以极坐标方程给出： $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$)

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

例 9 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ 一拱 (图 11) 的长度

解： $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = 2a \sin \frac{t}{2}$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a$$

三、课堂小结：

本次课学习了利用定积分计算平面图形面积，旋转体体积，平行截面面积已知的几何体

体积，平面曲线弧长的方法。

第六讲 定积分的物理应用

教学目的与要求：了解定积分在物理学的引力问题、水压力、功及交流电路中的应用，能用定积分知识解决较为简单的实际问题。

知识点：引力问题、水压力、变力沿直线所作的功、函数的平均值及其在交流电路中的应用。

教学重点：通过一些常见问题，说明应用元素法把物理量表示成定积分的一般方法。

教学难点：定积分的数学思想与物理学原理的融合贯通。

教学方式：讲解、练习

教学思路：通过常见物理学问题，说明应用定积分的元素法把物理量表示为定积分的一般方法。

教学过程：

一、复习

定积分的元素法

二、新授

(一) 引力问题

复习：质点间的万有引力定律：质量分别为 m_1, m_2 ，相距为 r 的两质点间的引力的大小为 $F = k \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ，其中 k 为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线的方向。

[万有引力定律，仅适用于质点间的情况。非质点的物体间的引力大小需根据微元法思想，采用定积分计算]

例 1 设有一均匀细杆，长为 L ，质量为 M ，另有质量为 m 的质点和杆在一条直线上，它到杆的近端的距离为 a ，计算细杆对质点的引力。

解：以质点 m 处为坐标原点， x 轴沿杆向右。取 x 为积分变量，在 $[a, a+L]$ 上取一小段 $[x, x+dx]$ ，则小段质量为 $\frac{M}{L}dx$ ，小段到质点的距离为 x ，由万有引力定律，这一小段

对质点的引力为 $dF = k \cdot \frac{mMdx}{Lx^2}$ ，其方向沿着细棒所指方向。于是棒对质点的引力为

$$F = \frac{kMm}{L} \int_a^{a+L} \frac{1}{x^2} dx = \frac{kMm}{a(a+L)}$$

例 2 设有一长度为 L ，线密度为 ρ 的均匀细直棒，在其中垂线距细棒为 a 处有一质量为 m 的质点 A ，试计算该细棒对质点 A 的引力。

解：建立坐标系。取 x 为积分变量，其变化区间为 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ ，在 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ 上任取一个小区间 $[x, x+dx]$ ，把细棒上相应于这个小区间的小弧段近似地看成质点，其质量为 ρdx ，与 A 点的距离为 $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ 。因此，可以按照两质点间的引力计算公式求出这一小段细棒对

质点 A 的引力大小 dF 的近似值为 $dF = k \cdot \frac{m\rho dx}{a^2 + x^2}$ 。

由于量 F （引力的大小）对区间 $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ 不具有可加性，即总量 F 不等于对应各部分区间的各分量 dF 直接相加，所以应作分解。设 F_x ， F_y 分别表示 F 沿水平方向与垂直方向分力的大小，则

$$dF_y = k \frac{m\rho dx}{x^2 + a^2} \cos\theta = k \frac{am\rho dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$dF_x = k \frac{m\rho dx}{a^2 + x^2} \sin\theta = k \frac{m\rho x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

于是

$$F_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k \cdot \frac{am\rho dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2km\rho}{a} \cdot \frac{L}{\sqrt{4a^2 + L^2}}$$

$$F_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k \cdot \frac{m\rho x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0$$

因此，所求的细直棒对质点 A 的引力大小为

$$F = F_y = \frac{2km\rho}{a} \cdot \frac{L}{\sqrt{4a^2 + L^2}}$$

方向与细直棒垂直且由 A 指向细棒。

（二）水压力

物理知识：在水深 h 处的压强为 $P = rh$ ，这里 γ 为液体的密度。如果有一面积为 A 的平板水平放置在深为 h 处，那么，平板一侧所受液体的压力为： $F = PA$

如果平板垂直放置在水中，那么，由于水深度不同的点处压强 P 不相等，平板一侧所受的水压力就不能用上述的方法计算。此时可用积分微元法处理。

例 3 一闸门呈倒置的梯形，两底长度分别为 $2a$ ， $2b$ （ $a < b$ ），高为 h 。求满水时闸门一侧所受水压力的水大小？

解：取特定坐标系，则直线 AB 的方程为 $y = \frac{a-b}{H}x + b$ 。

在 $[0, H]$ 中任取一个小区间 $[x, x + dx]$ ，与这个小区间相对应的窄条所处的深度为 x ，所以，这一窄条上所受的水压力近似地可表为

$$dF = \gamma x(2y)dx = 2\gamma x\left(\frac{a-b}{H}x + b\right)dx$$

所以闸门一侧所受的水的压力为

$$F = \int_0^H 2\gamma x\left(\frac{a-b}{H}x + b\right)dx = \frac{1}{3}(2a + b)\gamma H^2$$

（三）变力沿直线所作的功

物理知识：如果物体在常力 F 的作用下沿直线运动，且力的方向与物体运动方向一致，那么，在物体移动了距离 S 时，力对物体所作的功为： $W = F \cdot S$

在实际问题中，物体在运动过程中所受到的力是变化的。那么上述公式就不能直接使用。此时可用元素法导出变力沿直线所作的功的计算公式。

设物体运动的直线为 Ox 轴，物体在 x 处所受的力为 $F = F(x)$ （方向与运动方向一致），取 x 为积分变量，其变化范围为 $[a, b]$ ，设 $[x, x+dx]$ 为 $[a, b]$ 上的任一小区间，当物体从 x 移动到 $x+dx$ ，力 $F = F(x)$ 的变化很小，可以近似看作是不变的，于是，变力对物体所做的功近似地为 $F(x)dx$ ，即功元素为 $dW = F(x)dx$ 。

因此，当物体由点 a 移动到点 b 时，外力 F 对物体所做的功为 $W = \int_a^b F(x)dx$ 。

例 4 两质点 A 、 B 的质量分别为 M ， m ，相距为 a ，将质点 B 沿直线 AB 移至距 A 为 b 的位置 B' ，求克服引力所作的功。

解：取坐标系。当质点 B 位于 x 处时，两质点之间的引力的大小为 $F(x) = \frac{kMm}{x^2}$ 。

所以由上述公式，所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{kMm}{x^2} dx = kMm \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

下述例子，虽不是变力沿直线所作的功，但也用积分进行计算：

例 5 设有半径为 $10m$ 的半球形水池盛满了水，现将池内的水全部抽出，问需要作多少功？

解：以球心为坐标原点， Ox 轴垂直向下建立坐标系

取深度 x 为积分变量，其变化区间为 $[0, 10]$ 。相应于 $[0, 10]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的一薄层水的高度为 dx ，水的密度为 $9.8N/m^3$ ，因此，如 x 的单位是 m ，这一层水的重量近似

于 $9.8\pi(10^2 - x^2) dx(N)$ ，这层水抽出池外需做的功近似地为 $dW = 9.8\pi(10^2 - x^2) \cdot xdx$

于是所求的功为 $W = \int_0^{10} 9.8\pi(10^2 - x^2) dx = 2.45 \times 10^4 \pi (J)$ 。

（四）函数的平均值及其在交流电路中的应用

1. 函数的平均值

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，把 $[a, b]$ 分成 n 等分，分点为

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

每一小区间的长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ，令在各分点处的函数值分别为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，这 n 个

函数值的平均值为 $\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ 。显然，当 n 越大，即每份的长度 Δx_i 越小，上式所表示的平均值就越能确切地表达函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上所取得的一切值的平均值，因此，我们把

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ 叫做函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值，记作 $\bar{y}$ ，即

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

显然，定积分中值定理中的 $f(\xi)$ 就是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值。

例 6 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度。

解：自由落体的速度为 $V = gt$ ，所要计算的平均速度为 $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T gtdt = \frac{gT}{2}$ 。

2. 函数平均值在交流电路中的应用

在交流电路中，电流强度 I 是随时间变化的，是时间 t 的函数，因而 $P = I^2 R$ 所表示的功率只是时刻 t 的瞬时功率。由于使用电器的时间一般不是一瞬间，而是一段时期，所以需要计算一段时期的平均功率。

例 7 计算纯电阻电路，正弦交流电 $i = I_m \sin \omega t$ 在一个周期上的功率的平均值（简称平均功率），其中 I_m 是电流的极大值（峰值）。

解：设电阻为 R ，那么这电路中电压为 $u = iR = I_m R \sin \omega t$ 。

而功率为 $P = ui = I_m^2 R \sin^2 \omega t$ 。

因此功率在长度为一个周期的区间 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 上的平均值为

$$\bar{P} = \frac{W}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

补充例题：

一个半径为 R 的半圆环导线，均匀带电，电荷密度为 σ ，在圆心处放置一个带电量为 q 的点电荷，求它们之间的作用力。

解：建立坐标系如图 6，则导线所在半圆的方程为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad ds = \sqrt{(1+y')^2} dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$$

ds 所带电量为 σds ， ds 与 q 之间的作用力大小为 $dF = k \frac{\sigma ds \cdot q}{R^2} = \frac{k\sigma q ds}{R^2}$

设作用力 F 在垂直方向与水平方向的分力大小分别为 F_y 与 F_x ，则

$$dF_y = \frac{k\sigma q ds}{R^2} \cdot \frac{y}{R} = \frac{k\sigma q}{R^3} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{k\sigma q dx}{R^2}$$

$$dF_x = \frac{k\sigma q ds}{R^2} \cdot \frac{x}{R} = \frac{k\sigma qx}{R^3} \cdot \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{k\sigma qx}{R^2 \sqrt{R^2 - x^2}} dx$$

$$\text{故 } F_y = \int_{-R}^R dF_y = \int_{-R}^R \frac{k\sigma q}{R^2} dx = \frac{2k\sigma q}{R}, \quad F_x = 0$$

所以 $F = F_y$ ，方向指向 q 。

第七讲 定积分习题课

教学目的与要求：使学生在前几课时新授的基础上，进一步理解与定积分有关的概念与性质，掌握进行定积分计算的各种方法和技巧以及定积分在几何和物理中的应用。

知识点：有关定积分的所有概念、性质、方法、广义积分知识，定积分的应用。

教学重点：定积分的概念、性质、计算方法及几何应用；微积分基本定理。

教学难点：定积分的概念、定积分求体积，物理应用。

教学方式：复习，练习

教学思路：先进行本章有关知识的复习，然后进行一定量的练习。

教学过程：

一、复习

1. 定积分的概念、性质、几何意义，积分上限函数，微积分基本定理；
2. 定积分的换元积分法；
3. 定积分的分部积分法；
4. 广义积分的定义及计算方法；
5. 定积分的几何应用（平面图形面积、特殊体积、平面曲线弧长）；
6. 定积分的物理应用（引力、功、压力、平均值等）。

二、纠错

针对本章学习过程中学生作业中出现的普遍性问题进行讲解，分析出现错误的原因。

三、课堂练习（学生先独立做，然后根据具体情况进行讲评，给出解答）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$ ，记 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$ 。

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$ 。

证：∵ $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故 $F(x)$ 在 (a, b) 内可导，且由积分中值定理，存在 $\xi \in [a, x]$ ，使 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$ ，从而

$$F'(x) = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2} = \frac{(x-a)f(x) - (x-a)f(\xi)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a}$$

由于 $f'(x) \leq 0$ ，故当 $a \leq \xi \leq x$ 时， $f(x) - f(\xi) \leq 0$ ，而 $x-a > 0$ ，所以 $F'(x) \leq 0$ ，证毕。

$$2. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

解：显然此极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，应用 L'Hospital 法则得

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

3. 设 $I(a) = \int_{-1}^1 |x - ae^x| dx$ ， $|a| \leq 1$ ，求 $I(a)$ 的最大值

$$\text{解: } I(a) = \int_{-1}^a (a-x)e^x dx + \int_a^1 (x-a)e^x dx = 2e^a - a(e+e^{-1}) - 2e^{-1}$$

$$I'(a) = 2e^a - (e+e^{-1})$$

令 $I'(a) = 0$, 得 $a = \ln \frac{e+e^{-1}}{2}$, 当 $a \in [-1, \ln \frac{e+e^{-1}}{2}]$ 时, $I'(a) < 0$; 当 $a \in (\ln \frac{e+e^{-1}}{2}, 1]$ 时, $I'(a) > 0$ 。所以 $I(a)$ 在 $a = \ln \frac{e+e^{-1}}{2}$ 取得最小值。而 $I(1) = 2e - (e+e^{-1}) - 2e^{-1} = e - 3e^{-1}$, $I(-1) = e + e^{-1}$, 所以 $a = -1$ 时, $I(a)$ 取得最大值 $I(-1) = e + e^{-1}$ 。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且满足 $f(1) = 2 \int_0^1 xf(x)dx$, 证明在 $[0, 1]$ 内至少有一点 θ , 使 $f'(\theta) = -\frac{f(\theta)}{\theta}$ 。

证明: $\because f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 从而连续

$$\therefore \text{必存在 } a \in [0, \frac{1}{2}], \text{ 使 } f(1) = 2 \int_0^1 xf(x)dx = 2af(a) \cdot \frac{1}{2} = af(a)$$

令 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(a) = af(a)$, $F(1) = f(1) = af(a)$, 则由罗尔定理知, 必存在 $\theta \in [a, 1]$, 使 $F'(\theta) = 0$, 而 $F'(x) = xf'(x) + f(x)$, 故有 $\theta f'(\theta) + f(\theta) = 0$, 此即要证的等式。

$$5. \text{ 设 } f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt, \text{ 试求 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{解: } f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt, \text{ 令 } t = \frac{1}{u}, \text{ 则}$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du$$

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt + \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt \\ &= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} \left(\frac{1}{t} + 1\right) dt = \int_1^x \ln t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \ln t d \ln t = \frac{\ln^2 x}{2} \end{aligned}$$

$$6. \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1, \text{ 试求 } a, b.$$

解: 显然, $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt$ 为 $\frac{0}{0}$ 型, 由罗比塔法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b - \cos x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = 1$$

由于 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故应有 $b - \cos x \rightarrow 0$, 即 $b = 1$

又由于 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0)$, 所以有

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{a+x}} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 1, \text{ 即 } a = 4$$

综合上述推导知: $a = 4, b = 1$

7. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \leq M$, $f(a) = 0$, 证: $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M}{2} (b-a)^2$

证: 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导, 则由中值定理知, 对 $\forall x \in [a, b]$, 总存在 $\xi \in [a, x]$, 使 $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \leq M(x-a)$, 从而

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M(x-a) dx = M \left. \frac{(x-a)^2}{2} \right|_a^b = \frac{M}{2} (b-a)^2$$

8. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$ 。

解: 令 $\int_0^1 f(t) dt = a$, 则 $f(x) = x + 2a$, 从而

$$a = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t + 2a) dt = \frac{1}{2} + 2a$$

所以 $a = -\frac{1}{2}$, 即 $f(x) = x + 2a = x - 1$

9. 设 $f(x) = \int_2^{x^2} \frac{\sin(xt)}{t} dt$, 求 $f'(x)$

解: 令 $u = xt$, 则 $t = \frac{u}{x}$, $dt = \frac{du}{x}$

当 $t = 2$ 时, $u = 2x$; 当 $t = x^2$ 时, $u = x^3$, 于是得 $f(x) = \int_{2x}^{x^3} \frac{\sin u}{u} du$ 。

所以 $f'(x) = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = \frac{3}{x} \sin(x^3) - \frac{1}{x} \sin 2x$ 。

10. 设 $g(x)$ 处处连续, 又 $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$, 求 $f'(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 - 2xt + t^2) g(t) dt \\ &= \frac{1}{2} x^2 \int_0^x g(t) dt - x \int_0^x t g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 g(t) dt \\ f'(x) &= x \int_0^x g(t) dt + \frac{1}{2} x^2 g(x) - \int_0^x t g(t) dt - x^2 g(x) + \frac{1}{2} x^2 g(x) \\ &= x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x t g(t) dt \end{aligned}$$

11. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = xf(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} xf'(x) dx$$

解：

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t} - \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{\pi - x} dx \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \end{aligned}$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 试证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使 $f(\xi) = f(1-\xi)$ 。

证: 设 $F(x) = f(x) + f(1-x)$

$$\because \int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \therefore \int_0^1 f(1-x) d(1-x) = 0$$

$$\text{即 } \int_0^1 f(1-x) dx = 0 \quad \therefore \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = 0$$

$$\text{即 } \int_0^1 F(x) dx = 0$$

由积分中值定理知, 存在 $\xi \in [0,1]$, 使 $F(\xi)(1-0) = \int_0^1 F(x) dx = 0$

$$\text{即 } f(\xi) + f(1-\xi) = 0$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶导数连续, 且 $f''(x) \leq 0$, 试证明 $\int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

证: 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a) f\left(\frac{a+x}{2}\right)$

$$\text{则 } F'(x) = f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) - (x-a) f'\left(\frac{a+x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

而由拉格朗日中值定理, 必存在 $\xi \in \left[\frac{a+x}{2}, x\right]$, 使 $f(x) - f\left(\frac{a+x}{2}\right) = f'(\xi) \cdot \frac{x-a}{2}$

$$\text{所以 } F'(x) = \frac{x-a}{2} f'(\xi) - \frac{x-a}{2} f'\left(\frac{a+x}{2}\right) = \frac{x-a}{2} [f'(\xi) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right)]$$

再由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) \leq 0$, 从而有 $\alpha \in \left[\frac{a+x}{2}, \xi\right]$

$$\text{使 } f'(\xi) - f'\left(\frac{a+x}{2}\right) = f''(\alpha) \left(\frac{a+x}{2} - \frac{a+x}{2}\right) \leq 0$$

$$\text{所以有 } F'(x) = \frac{x-a}{2} \left(\frac{a+x}{2} - \frac{a+x}{2}\right) f''(\alpha) \leq 0.$$

即 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上不增, 而 $F(a) = 0$, 故 $F(b) \leq F(a) = 0$, 即

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$$

原不等式成立。

第七章 无穷级数

第一讲 常数项级数

教学目的与要求：理解无穷级数的定义，区分有限多个数相加与无穷多个数相加的本质区别，掌握无穷级数收敛的意义和性质，以及级数收敛的必要条件，会判断简单级数的敛散性。

知识点：常数项级数的定义；级数收敛的性质；级数收敛的必要条件。

重点：级数敛散性的判断。

难点：求收敛级数的和。

教学方式：讲授。

教学思路：首先由数列引入常数项级数的定义、部分和数列，判断级数的敛散性关键在于求部分和数列的极限，若极限存在，说明级数收敛，否则级数发散，可列举简单题型教会学生如何根据定义来判断级数的敛散性，最后介绍收敛级数的性质和级数收敛的必要条件。

教学过程：

1. 常数项级数的定义

对于已给数列 $\{u_n\}$ ，把它的各项依次用加号连续起来的表达式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为常数项级数， u_n 称为该级数的通项或一般项。

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为该级数的部分和， $\{S_n\}$ 称为该级数的部分和数列。

2. 常数项级数收敛的定义

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称该级数收敛，并称

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k \text{ 为它的和，记作 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S；\text{否则，称该级数发散，} r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

称为该级数的余项，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0$

例 1 讨论公比为 q 的等比级数（也叫几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0) \text{ 的敛散性。}$$

解：该级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \text{ 时} \\ na & q = 1 \text{ 时} \end{cases}$$

① 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}, \text{ 故级数收敛, 其和为 } \frac{a}{1-q};$$

② 当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 故该级数发散;

③ 当 $q = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, 故级数发散;

④ 当 $q = -1$ 时, 该级数变为 $a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$

其部分和 $S_n = \begin{cases} a & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 此时级数也发散。

综上所述, 当 $|q| < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发

散。

等比级数为常用的数项级数, 对于它的敛散性结论要求学生当作公式来熟记, 必须牢牢掌握, 且会运用。

例 2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ 收敛, 且其和 $S=1$

证：由于级数的部分和数列

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, 所以该级数收敛, 且其和 $S=1$ 。

此题的关键在于部分和的计算, 怎样把一般项拆成两项的差, 从而使得一些项相互抵消, 这是代数运算中常用的方法, 要求学生运用。

例 3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ 的敛散性。

解：此级数的部分和为

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\
 &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
 &= \sqrt{n+1}-1
 \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ，故此级数发散。

此题求部分和主要运用了分母有理化的知识，从而使得各项中的某些项可以相互抵消，这也是求部分和中常用的方法。

3. 无穷级数的基本性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ (k 为常数) 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

(3) 若 $u_n \leq v_n$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

证：(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 τ_n 与 λ_n

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的部分和 S_n 为：

$$S_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) = \tau_n \pm \lambda_n$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n \pm \lambda_n) = \tau \pm \lambda$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛，且其和为 $\tau \pm \lambda$ 。

(2)、(3) 的结论类似，由学生自己证明。

这个性质说明收敛的级数可以进行线性运算，还可以比较大小。

例 4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{n-1}}{3^n}$ 是否收敛？若收敛，求其和。

解：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ 是公比 $q = \frac{1}{3} < 1$ 的等比级数，所以收敛，且其和为 $\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$ 。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ 是公比 $|q| = \left| -\frac{1}{3} \right| < 1$ 的等比级数，所以收敛，且其和为 $\frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4}$ 。

由上述性质可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{n-1}}{3^n}$ 收敛，且其和为 $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 。

注意：只有收敛的级数可以进行加减，若两级数中有一个发散，那么结论都不成立。

性质 2 在级数的前面去掉或加上有限项，不改变级数的敛散性。

证：设有级数

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_{k+n} + \dots$$

将其前 k 项去掉，得到新级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+n} + \dots$$

于是新得的级数的部分和为

$$\lambda_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+n} = S_{k+n} - S_k$$

其中 S_k 和 S_{k+n} 分别为原来级数的前 k 项及 $k+n$ 项之和，由于 k 固定，故 S_k 为定数。

从而当 $n \rightarrow \infty$ 时， λ_n 与 S_{k+n} 或者同时有极限，或者同时没有极限，若同时有极限，则

$$\lambda = S - S_k, \text{ 其中 } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k+n}.$$

同理可证在级数的前面部分加上有限项，不改变级数的敛散性。

如：级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数，因而收敛，其和为 $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

如果去掉级数的前三项，所得新级数为： $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

它仍然收敛，且其和为 $\frac{1}{8} / (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

特别要注意的是：两级数的敛散性虽然相同，但当二者收敛时，其和不相同。

性质 3 收敛级数加括弧后所得级数仍收敛，且其和不变。

证：设有收敛级数

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

将它按照一定的规律加括号后，把每个括号的值看作一项，得到新级数，例如：

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \dots$$

因 λ_m 表示新级数的前 m 项的和，因 S_n 表示相应于 λ_m 的原级数的前 n 项的和，则有

$$\lambda_1 = S_1, \quad \lambda_2 = S_2, \quad \dots, \quad \lambda_m = S_m, \quad \dots$$

显然，当 $m \rightarrow \infty$ 时， $n \rightarrow \infty$ ，从而 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，

运用此性质要注意，收敛级数去括号后所成的级数不一定收敛，如级数

$$(1-1) + (1-1) + \dots$$

显然收敛于 0，但去括号的级数 $1-1+1-1+\dots$ 却是发散的。

推论：如果加括号后的级数发散，则原级数也发散。

例 5 证明调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 是发散的。

证：将此级数的两项，两项，四项，八项， $\dots$ ， 2^m 项， $\dots$ ，括在一起，有

$$(1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}) + \cdots$$

显然 $1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} > \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}$$

故加括号后的级数前 $m+1$ 项的和大于 $\frac{1}{2}$ ，从而这级数发散，由推论知调和级数也发散。

4. 级数收敛的必要条件

定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于零，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

证：设 S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和，因为 $u_n = S_n - S_{n-1}$

假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ 。

注意： $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ，那

么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散，所以，常用必要条件判断级数发散的情况。如级数

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ ，因此，该级数是发散的。

小结：引导学生一起回忆本次课讲述的基本内容、级数收敛的定义、级数的性质以及级数收敛的必要条件。牢牢记住等比级数当 $|q| < 1$ 时收敛，当 $|q| \geq 1$ 时发散和调和级数是发散的结论。

第二讲 正项级数的审敛法

教学目的与要求：理解正项级数、交错级数和任意项级数的定义，掌握正项级数的三个审敛法，交错级数的判别法，会运用这些判别法判断级数的敛散性。对于任意项级数要求能够判断它的绝对收敛和条件收敛问题。

知识点：正项级数的审敛法：比较审敛法；比较审敛法的极限形式；比值审敛法；柯西审敛法；莱布尼兹判别法；绝对收敛和条件收敛。

重点：正项级数的三个审敛法和莱布尼兹判别法

难点：比较审敛法

教学方式：讲授

教学思路：

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加，由于单调有界数列必

有极限，由此给出正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界，接着讲述比较审敛法和它的极限形式，利用该审敛法讨论 p -级数的敛散性。 p -级数敛散性的结论要求学生熟记。比值审敛法和柯西审敛法都是利用已知级数本身的条件判断该级数的敛散性，相对比较审敛法而言较容易些，但在运用过程中必须注意，若判别法失效，必须改用其它方法来判断。

其次介绍交错级数的敛散性，只要它满足两个条件： $v_n \geq v_{n+1}$ ； $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ ，则交错级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 收敛，且其和 $S \geq v_1$ 。最后引导学生利用上述审敛法讨论任意项级数的绝对

收敛和条件收敛问题。

教学过程：

一、正项级数的审敛法

定义：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 $u_n \geq 0$ ，则称该级数为正项级数。

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 的部分和数列为 S_n ，显然 $\{S_n\}$ 是一个单调增加数列：

$$S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots$$

由此可得：

定理 1 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有界。

定理 2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数。

(1) 若 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

证: (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 a , 并且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq a$$

从而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列有界, 根据定理 1 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) 用反证法, 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 (1) 知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散矛盾, 故

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散。

例 1 讨论 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ 的敛散性, 其中常数 $p > 0$ 。

解: 当 $p=1$ 时, 为调和级数是发散的

当 $p < 1$ 时, 因为 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也是发散的。

当 $p > 1$ 时, 因当 $n-1 \leq x \leq n$ 时, 有 $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 所以

$$\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \quad (n=2, 3, \dots)$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \quad (1)$$

其部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left[1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right] + \left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

故级数 (1) 收敛, 由比较审敛法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也收敛。

综上所述可得结论: 当 $p \leq 1$ 时, p -级数发散; $p > 1$ 时, p -级数收敛。

利用比较审敛法判断级数的敛散性时，常把 p -级数和等比级数当作已知级数比较。

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \right]^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) 的敛散性。

解：当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，由于 $\left[\frac{1}{n(n+1)} \right]^{\alpha} < \frac{1}{n^{2\alpha}}$ ，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛，所以原级数收敛。

当 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时，由于 $\left[\frac{1}{n(n+1)} \right]^{\alpha} > \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 发散，所以原级数发散。

定理 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 。

(1) 若 $0 < l < +\infty$ ，则两个级数同时收敛或同时发散；

(2) 若 $l = 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 若 $l = +\infty$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证：(1) 由极限的定义可知，对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ，存在正整数 N

当 $n > N$ 时，有 $\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$ ，即 $\frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3l}{2} v_n$

由比较审敛法的性质可知结论成立。

(2)、(3) 的证明由学生自己证明。

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{3^n}$ ($0 < \alpha < \pi$) 的敛散性。

解：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\alpha}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n \cdot \frac{2}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha} = 1$ 。

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha$ 是公比为 $\frac{2}{3} < 1$ 的等比级数，收敛，由比较审敛法的极限形式可知原级数收敛。

例 4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$ 的敛散性。

解：因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}(-\frac{1}{n^2})}{-\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数也收敛。

比较审敛法和它的极限形式，使用起来很不方便，有时甚至非常困难，使用时必须熟悉已知级数的敛散性才能加以比较，下面的两个审敛法都是利用已知级数本身的条件来判断该级数敛散性，相对容易些。

定理 4 （比值审敛法，也叫达朗贝尔（D'Alembert）判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(1) 若 $\rho < 1$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\rho > 1$ (含 $\rho = +\infty$)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(3) 若 $\rho = 1$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散。

证：(1) 当 $\rho < 1$ 时，取适当小的正数 ε 使 $\rho + \varepsilon = r < 1$ ，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ，所以存

在正整数 N ，当 $n > N$ 时，有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$$

即
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r$$

因此
$$u_{N+1} < ru_N, u_{N+2} < ru_{N+1} < r^2 u_N, u_{N+3} < ru_{N+2} < r^3 u_N, \dots$$

这样级数 $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$ 的各项小于公比为 $r < 1$ 的等比级数

$$ru_N + r^2 u_N + r^3 u_N + \dots$$

的对应项，所以它也收敛。而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 只比它多了前 N 项，由性质知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

(2) 当 $\rho > 1$ 时，取适当小的正数 ε 使 $\rho - \varepsilon > 1$ ，由极限定义，存在正整数 N ，当 $n > N$

时, 有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon, \text{ 即 } \frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$$

从而 $u_{n+1} > u_n$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项逐渐增大, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, 不满足收敛的必要

条件, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

类似可证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

(3) 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散, 如 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$$

但当 $p \leq 1$ 时级数发散, 而 $p > 1$ 时级数收敛。

例 5 讨论下列级数的敛散性。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$$

解: (1) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, 由比值审敛法可知原级数收敛。

$$(2) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{5^n}{n^5}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^5 = 5 > 1$$

根据比值审敛法可知原级数发散。

运用比值审敛法判断级数的敛散性较容易掌握, 一般而言, 级数的一般项含幂指数或阶

乘时, 可考虑该审敛法, 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 该审敛法失效, 须利用别的方法来判断。如级

数收敛的定义、性质, 必要条件等。

定理 5 (根值审敛法, 也叫柯西 (Cauchy) 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(1) 若 $\rho < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\rho > 1$ (含 $\rho = +\infty$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 若 $\rho = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散。

证: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 取适当小的正数 ε 使 $\rho + \varepsilon = r < 1$, 根据极限定义, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|\sqrt[n]{u_n} - \rho| < \varepsilon$

即 $\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r < 1$, 即 $u_n < r^n$

由于等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ($r < 1$) 收敛, 由比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 取适当小的正数 ε 使 $\rho - \varepsilon > 1$, 从而存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|\sqrt[n]{u_n} - \rho| < \varepsilon$, 即 $\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$

所以 $u_n > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 仍以 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 为例, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p = 1$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散。

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (-1)^n$ 的敛散性。

解: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1 - \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$, 由根值审敛法可知原级数收敛。

例 7 用适当的方法判定下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} (x \in \mathbb{R})$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

解：(1) 因比值审敛法，由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{|x|^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

故该级数发散。

(2) 用根值审敛法，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} < 1$ ，故该级数发散。

(3) 用比较法的极限形式，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \pi$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故该级数也收敛。

(4) 用比较审敛法，由于 $0 < u_n = \frac{3+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$ ，又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 是收敛的，故该级数也收敛。

数也收敛。

上述判别正项级数敛散性的四个审敛法，都是充分条件，如果用其中的某一个审敛法不能判定所给级数的敛散性，那么就要改用其它的审敛法以及级数收敛与发散的定理、收敛的性质、必要条件等去判别，这需要学生通过练习不断总结各种方法优劣及适用范围，熟练而灵活地使用它们。

二、交错级数及其莱布尼兹判别法

定义 如果一个级数的各项是正负交错的，则称之为交错级数，一般形式为

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots + (-1)^{n-1} v_n + \dots$$

或 $-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - \dots + (-1)^n v_n + \dots$

其中 $v_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$

定理 6 (莱布尼兹 (Leibniz) 判别法)

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 满足条件

$$(1) v_n \geq v_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$$

则交错级数收敛，且其和 $S \leq v_1$ ，余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq v_{n+1}$

证：由条件 (1) 可知

$$S_{2n} = (v_1 - v_2) + (v_3 - v_4) + \dots + (v_{2n-1} - v_{2n})$$

是单调递增的，又 S_{2n} 可写成

$$S_{2n} = v_1 - (v_2 - v_3) - \dots - (v_{2n-2} - v_{2n-1}) - v_{2n} < v_1$$

由于单调有界数列必有极限，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq v_1$ 。

而 $S_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+1}$ 由条件 (2) 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ ，得： $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S + 0 = S$

综上可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ ，故此级数收敛，且其和 $S \leq v_1$ ，对于余项 r_n ，由于

$$r_n = \pm(v_{n+1} - v_{n+2} + \dots) \quad \text{即} \quad |r_n| = v_{n+1} - v_{n+2} + \dots$$

其右端也是一个交错级数，且满足收敛的两个条件，故 $|r_n| \leq v_{n+1}$ 。

例 8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 的敛散性

解：此级数为交错级数， $v_n = \frac{1}{n}$ ，显然 v_n 单调递减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

由莱布尼兹判别法得此级数收敛。

注意：使用莱布尼兹判别法时，要求上述两个条件同时满足，若只有一个条件满足，结论不一定成立。

3. 绝对收敛和条件收敛

正项级数和交错级数是两种常见的数项级数，比较特殊，而在一般情况下级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的

各项 u_n 可以为任意实数，称其为任意项级数，下面介绍判别任意项级数敛散性的一个常用

方法：绝对收敛。

定理 7 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

证：令 $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ ，则 $v_n \geq 0$ ，且 $v_n \leq |u_n|$ ，由正项级数比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

也收敛。而 $u_n = (2v_n - |u_n|)$ ，由无穷级数基本性质可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛。

注意：定理的逆定理不成立，如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却

是发散的调和级数。

定义 若绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但绝

对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

例 9 讨论下列级数的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

解：(1) 由于 $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right|$ 也收敛，因此，原级数绝对收敛。

(2) 因为 $\left| (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ ，由比较审敛法的极限形式知，原级数的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

是发散的，但

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ ，由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 收敛，因而是条件收敛的。

例 10 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}} \quad (p \geq 1)$ 的敛散性

解：由于 $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}} \right| = \frac{1}{n^p + (-1)^{n-1}} \sim \frac{1}{n^p} \quad (n \rightarrow \infty)$

由比较审敛法的极限形式知，当 $p > 1$ 时，原级数绝对收敛；当 $p = 1$ 时，原级数的绝对值级数发散。又因为

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n[n + (-1)^{n-1}]}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n[n+(-1)^{n-1}]}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+(-1)^{n-1}} = 1, \text{ 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛。}$$

由比较审敛法的极限形式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[n+(-1)^{n-1}]}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}$ 收敛。

从而知当 $p=1$ 时，原级数是条件收敛的。

此例较难，运用的知识面广，用到了 p -级数的敛散性，比较审敛法的极限形式，最难之处是当 $p=1$ 时，把一般项分解成两项之差，然后利用性质和判别法来判断原级数的敛散性。通过此例使学生对分析问题、解决问题的能力有所提高，对前面所述的级数判别法熟练运用并且能融会贯通。

小结：

此次课内容较多，数项级数敛散性判别法的重点，难点全在这部分，要求学生必须熟记如下定理：比较审敛法、比较审敛法的极限形式、比值审敛法和柯西判别法（这些定理只适合于正项级数）；莱布尼兹判别法（适合于交错级数）；任意项级数的绝对收敛和条件收敛，这些判别法在运用过程中不能混用，学生可以通过练习熟练掌握其中的知识技巧。

第三讲 幂级数

教学目的和要求：理解函数项级数的收敛性与和函数的概念，会求幂级数的收敛半径和收敛区间，掌握幂级数的运算性质，并且能够用逐项求导或逐项积分的方法求幂级数的和函数。

知识点：函数项级数的定义、收敛域和发散域；幂级数的收敛半径和收敛区间；幂级数的运算性质。

重点：幂级数的收敛半径和收敛区间，求幂级数的和函数。

难点：求幂级数的和函数。

教学方式：讲授

教学思路：

引导学生复述数项级数收敛与发散的定义，若把数项级数中的每项改为定义在同一数集上的函数，可得到函数项级数，类似可定义函数项级数的收敛和发散点。本课重点介绍一种常见的函数项级数——幂级数，根据正项级数的比值审敛法求幂级数的收敛半径和收敛区间，对于端点处的敛散性应按常数项级数加以判别，因此收敛区间可以为开区间、闭区间或半开半闭的区间。最后介绍幂级数的运算性质，重点讲述如何用逐项求导或逐项积分的方法求幂级数的和函数。

教学过程：

1. 函数项级数的一般概念

定义 1 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在集合 $D \subset \mathbb{R}$ 上的一函数列，称表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

为集合 D 上的函数项级数。 $u_n(x)$ 称为它的通项，前 n 项之和 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 称为它的部分和函数。

定义 2 当 $x = x_0 \in D$ 时，若级数 (1) 收敛，称 x_0 为该级数的收敛点，所有收敛点的全体构成的集合称为该级数的收敛域；若 x_0 不为收敛点，则称它为级数的发散点，所有发散点的全体构成的集合称为该级数的发散域；若 $\forall x \in D$ ，级数 (1) 都收敛，则称该级数在 D 上收敛。此时，称

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad x \in D$$

为函数项级数 (1) 的和函数，这时称

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

为该级数的余项，并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad (x \in D)$

2. 幂级数及其收敛域

$$\text{形如} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$\text{或} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (3)$$

的函数项级数称为幂级数，其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 叫做幂级数的系数。

在级数 (3) 中，若令 $x - x_0 = t$ ，它就变成级数 (2) 的形式，因此这里只讨论形如 (2) 的幂级数。

显然，当 $x = 0$ 时，级数 (2) 必定收敛，即幂级数总有收敛点。

现在思考的问题是：对于一个给定的幂级数，怎样求它的收敛域和发散域？下面定理解决了这一问题。

$$\text{定理} \quad \text{对于幂级数} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{如果} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

则 当 $|x| < \frac{1}{r}$ 时 (若 $r = 0$ ，则换 $\frac{1}{r}$ 为 $+\infty$)，该幂级数收敛；

当 $|x| > \frac{1}{r}$ 时，该幂级数发散。

证：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的各项取绝对值，得

$$|a_0| + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (4)$$

由比值审敛法，得：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = r |x|$$

所以当 $\rho = r|x| < 1$ ，即 $|x| < \frac{1}{r}$ 时级数 (4) 收敛，这表明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，因此它必然收敛。

$$\text{当 } \rho = r|x| > 1, \text{ 即 } |x| > \frac{1}{r} \text{ 时, 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| > 1$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| = +\infty$ ，从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = \infty$ 。由级数收敛的必要条件知该级数发散。

定理告诉我们，当 $r \neq 0$ 时幂级数 (2) 在以原点为中心， $\frac{1}{r}$ 为半径的对称区间内是收敛的。设 $R = \frac{1}{r}$ ，则在区间 $(-R, R)$ 内幂级数收敛。称 R 为幂级数的收敛半径。

当 $r = 0$ 时，收敛半径 $R = +\infty$ ，收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$ ；

当 $r = +\infty$ 时，收敛半径 $R=0$ ，收敛域缩为一点，即只在 $x=0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，

和为 a_0 。

例 1 求下列幂级数的收敛半径和收敛区间

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$$

$$\text{解：(1) 因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2, \text{ 所以, 收敛半径 } R = \frac{1}{2}.$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时，幂级数为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ，此为调和级数，它是发散的。

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，幂级数为收敛的交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ，所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ 的收敛区间为

$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \bigg/ \frac{3^n + (-2)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 + (-\frac{2}{3})^n(-2)}{1 + (-\frac{2}{3})^n} = 3$$

所以，收敛半径 $R = \frac{1}{3}$ ，当 $x = -\frac{1}{3}$ 时，级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n}{n}$ 也收敛（利用比值审敛法）故原级数在 $x = -\frac{1}{3}$ 处收

敛。

当 $x = \frac{1}{3}$ 时，级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n}{n}$ 收敛，所以，该级数是发散的。

因此，原幂级数的收敛区间为 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 。

例 2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛区间。

解：所给幂级数缺少 x 的奇次幂项，因此不能直接利用公式求收敛半径 R 。

考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ ，利用比值审敛法

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}} \cdot \frac{2(n+1)+1}{2n+1} = x^2$$

因为当 $\rho < 1$ ，即 $x^2 < 1$ ， $|x| < 1$ 时，所求幂级数绝对收敛，当 $x = \pm 1$ 时，代入级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛。

所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛区间为 $[-1, 1]$ 。

此题也可以通过换元的方法（令 $x^2 = t$ ），把原级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2n+1}$ ，求出它的收

敛半径 R ，由此可知当 $x^2 = |t| < R$ 时，即 $|x| < \sqrt{R}$ 时，原级数收敛。对于端点处的敛散性，根据常数项级数来判断，从而求出收敛区间。

例 3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛区间。

解：由正项级数的比值审敛法，得：

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}}{(-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n}} \right| = \frac{|x-2|}{2}$$

当 $\rho < 1$ 时，即 $|x-2| < 2$ ，也即 $0 < x < 4$ 时，幂级数收敛；

当 $x = 0$ 时，幂级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ ，它是发散的；

当 $x = 4$ 时，幂级数化为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ，也是发散的。

因此幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n}$ 的收敛区间为 $(0, 4)$ 。

此题也可令 $x-2 = t$ ，先求出级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n}$ 的敛半径 R

由此可知当 $|x-2| = |t| < R$ ，即 $2-R < x < 2+R$ 时，原级数收敛，再进一步判断端点处的敛散性，从而求出收敛区间。

3. 幂级数的运算性质

定理 1 设收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2 ，令

$R = \min\{R_1, R_2\}$ ，则在它们公共的收敛区间 (R_1, R_2) 上有：

(1) 级数 $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛, 并且 $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) x^n$,

(其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

(2) 它们的乘积级数收敛, 且 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$,

其中 $C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

注意: 两个收敛幂级数的相加减或相乘所得的幂级数, 其收敛半径 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ 。

如: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n) x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2^n) x^n$, 它们的收敛半径分别为 $R_1 = \frac{1}{2}$, $R_2 = \frac{1}{2}$, 而它

们相加所得到的级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(1+2^n) + (1-2^n)] x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

其收敛半径 $R=1$, 故 $R > \min\{R_1, R_2\}$ 。

定理 2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x)$, 收敛半径为 R , 则下列命题成立:

(1) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内连续, 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 的端点 $x=R$ (或

$x=-R$) 也收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续 (或在 $x=-R$ 处右连续)。

(2) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内有连续的导数, 且有逐项求导公式

$$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

且逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R 。

(3) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内可积, 且有逐项求积公式

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且逐项求积后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R 。

上述定理说明, 幂级数的和函数在收敛区间内不但具有连续性、可导性与可积性, 而且能够进行加法和乘法运算, 可以逐项求导, 逐项积分。利用这些性质可以求幂级数的和函数。

例 4 求幂级数 $1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^n(n+1)x^n+\cdots$ 的和函数。

解：显然幂级数的收敛半径 $R=1$ ，设和函数为 $S(x)$ ，即

$$S(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + \cdots$$

两边同时积分，得：

$$\int_0^x S(x) dx = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots + (-1)^n x^{n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x}$$

所以
$$S(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1).$$

例 5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数

解：幂级数的收敛区间为 $[-1, 1)$ ，设其和函数为 $S(x)$ ，即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \text{ 显然 } S(0) = 1.$$

于是 $xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ，两边逐项求导得：
$$[xS(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

再从 0 到 x 积分得：
$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$$

当 $x \neq 0$ 时，
$$S(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x), \text{ 从而}$$

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x) & -1 \leq x < 0, 0 < x < 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

这两个例题的共同特点是：不论是逐项求导还是逐项积分都用到了这样一个公式：

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \quad (|x| < 1)$$

因此求幂级数的和函数时，逐项求导或逐项积分后的级数转化为关于 x 的幂级数（系数为 1 或 -1 ）。

在计算过程中，必须注意 $S(0)$ 的值。

例 6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数。

解：幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ ，设其和函数为 $S(x)$

则
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

上式两边逐项求导得：

$$S'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = S(x) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

用分离变量解此微分方程得：

$$\ln S(x) = x + C_1 \quad \text{或} \quad S(x) = Ce^x \quad (C = \pm e^{C_1})$$

由于 $S(0) = 1$ ，则 $C=1$ ，所以 $S(x) = e^x$ ，于是有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

小结：

本次课重点介绍了幂级数的收敛半径和收敛区间。幂级数的运算性质，求幂级数的收敛区间，关键在于求出收敛半径 R ，从而可知当 $|x| < R$ 时幂级数收敛，当 $x = \pm R$ 时，按常数项级数另行判断。由此确定收敛区间；若 $R=0$ ，收敛区间为一点 $x=0$ ；若 $R = +\infty$ 则收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$ ；对于其它形式的幂级数，可由比值审敛法确定收敛区间。对于一个给定的幂级数，可利用逐项求导或逐项积分的方法求它的和函数，教会学生必须掌握。

第四讲 函数展开成幂级数

教学目的与要求：了解 Taylor 级数和 Maclaurin 级数，会用间接展开法把已知函数展开为幂级数，记住一些常见的函数的幂级数展开式，掌握函数展开为幂级数的间接展开法。

知识点：Taylor 级数和 Maclaurin 级数；函数展开为幂级数的直接展开法、间接展开法。

重点：函数展开为幂级数。

难点：求余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ (ξ 介于 0 与 x 之间) 的极限。

教学方式：讲授。

教学思路：首先提出问题：（1）如果函数 $f(x)$ 能展开为 $x - x_0$ 的幂级数，系数 a_n 如何

确定；（2）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 收敛于 $f(x)$ 的条件是什么？然后由幂级数的性质确定

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)，由此给出 Taylor 级数的定义。由泰勒公式与泰勒级数的关

系可知, 函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数的充要条件是余项的极限为 0, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0 \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当 $x_0 = 0$ 时, Taylor 级数成为了 Maclaurin 级数, 由上述分析可得函数 $f(x)$ 展开为 Maclaurin 级数的四个步骤, 利用这些步骤给出常见函数的幂级数展开式。
教学过程：

1. Taylor 级数

将函数 $f(x)$ 展开为幂级数的问题, 就是在 x_0 的某领域内得 $f(x)$ 表示为一个收敛的幂级数的问题, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad (1)$$

研究函数 $f(x)$ 能否展开为幂级数, 需要解决两个问题：

(1) 如果 $f(x)$ 能展开为 $x-x_0$ 的幂级数, 系数 a_n 如何确定；

(2) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 收敛于 $f(x)$ 的条件是什么？

先讨论第一个问题。假定 $f(x)$ 能展开为 $x-x_0$ 的幂级数, 由幂级数的性质, 对于 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 都有：

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3!2a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots$$

„

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-x_0) + \cdots$$

„

在以上各式, 令 $x = x_0$, 使得

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad \dots$$

由此可得：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \quad (2)$$

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

由上述结论知，若函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开成 $x - x_0$ 的幂级数，那么，

$f(x)$ 在 x_0 处具有任意阶导数，并且该级数的系数 a_n 由下式唯一确定：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

由 (3) 式所确定的系数 a_n 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 系数，相应地 (2) 式右端的幂级数称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数。

下面讨论第二个问题：(2) 式右端的幂级数是否收敛于 $f(x)$ ？收敛于 $f(x)$ 的条件是什么？

因为若 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内 $n+1$ 阶可导，则对于 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ，有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ (ξ 介于 x_0 与 x 之间)

设 $f(x)$ 在 x_0 处 Taylor 级数的部分和为 $S_{n+1}(x)$ ，则

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

因此，若在 x_0 处具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}(x) = f(x) \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 。

由此得：

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在

x_0 处的 Taylor 级数的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

如果函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内能展开为它在 x_0 处的 Taylor 级数，即等式 (2) 成

立，则称该等式为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 展开式。

令 $x_0 = 0$ 得 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 Taylor 展开式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开式，右端的级数称为 Maclaurin 级数。

2. 函数展开成幂级数的方法

(1) 直接展开法

由上述分析可得函数 $f(x)$ 展开为幂级数的基本步骤如下：

第一步 求 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

第二步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ...;

如果某阶导数不存在，则说明 $f(x)$ 不能展开成 x 的幂级数；

第三步 写出函数的 Maclaurin 级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

并求其收敛半径 R ；

第四步 估计余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, (ξ 介于 0 与 x 之间)

并考虑是否 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $x \in (-R, R)$, 若为 0, 则所得级数就是 $f(x)$ 的幂级数展开式。

例 1 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数

解：因为 $f^{(n)}(x) = e^x$, ($n = 0, 1, 2, \cdots$)

则 $f^{(n)}(0) = 1$, ($n = 0, 1, 2, \cdots$) $f(x) = e^x$ 的 Maclaurin 级数为

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

其收敛半径 $R = +\infty$ ；

而 $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, (ξ 在 0 与 x 之间), 对于任意有限数 x 有

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因 $e^{|x|}$ 有限, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 为收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$

所以 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

例 2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数

解: 因为 $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, ($n = 0, 1, 2, \cdots$)

则 $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

$f(x) = \sin x$ 的 Maclaurin 级数为

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

其收敛半径 $R = +\infty$

而 $R_n(x) = \frac{\sin \left[\xi + \frac{n+1}{2} \pi \right]}{(n+1)!} x^{n+1}$, (ξ 在 0 与 x 之间)

对于任意有限的数 x , 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, $x \in (-\infty, +\infty)$

直接展开法计算量大, 而且对于比较复杂的函数 $f(x)$, 余项 $R_n(x)$ 的极限难求。由于

函数的幂级数展开式唯一, 因此可从某些已知的函数展开式, 利用对收敛幂级数进行四则运算、逐项求导、逐项积分以及变量代换等, 求所给函数的 Taylor 展开式, 这种方法叫做间接展开法。

(2) 间接展开法

例 3 将函数 $\cos x$ 展开成 x 的幂级数

解: 因为 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, $x \in (-\infty, +\infty)$

逐项求导，得：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

例 4 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数

解：因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

而 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

上式两边从 0 到 x 积分，得：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad x \in (-1, 1]$$

例 5 将函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数

解：由上例可知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad x \in (-1, 1]$$

$$\text{则 } \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad x \in [-1, 1)$$

所以 $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$$= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

由上述例题可知，间接展开法较为方便快捷，但必须记住一些常见函数的幂级数展开式，如：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例 6 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展开成 x 的幂级数

解：因为 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$

而 $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} [1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + \cdots + (\frac{x}{2})^n + \cdots] \quad (-2 < x < 2)$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) - \frac{1}{2} [1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + \cdots + (\frac{x}{2})^n + \cdots] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^2-1}{2^2}x + \frac{2^3-1}{2^3}x^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \cdots \\ &\quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

此题也可用幂级数相乘来解决，其做法如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2-x} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \cdot \frac{1}{2} [1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + \cdots + (\frac{x}{2})^n + \cdots] \quad (-1 < x < 1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^2-1}{2^2}x + \frac{2^3-1}{2^2}x^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \cdots \end{aligned}$$

此方法相对第一种方法要麻烦些。此例说明当分母为二次函数时，应先将分母分解因式，利用待定系数法把函数表示为两个函数之差，然后利用间接展开法把已知函数展开为 x 的幂级数。

例 7 把函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数

解：设 $y = x - \frac{\pi}{4}$ ，于是原题就转化为将函数 $\sin(\frac{\pi}{4} + y)$ 展开成 y 的幂级数，而

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\frac{\pi}{4} + y) = \sin \frac{\pi}{4} \cos y + \cos \frac{\pi}{4} \sin y \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}y^{2n} + \cdots] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} [1 - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}y^{2n} + \cdots] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} [1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots + \\ &\quad (-1)^n \frac{1}{(2n)!}(x - \frac{\pi}{4})^{2n} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}(x - \frac{\pi}{4})^{2n+1} + \cdots] \\ &\quad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned}$$

小结：

通过本次课的学习，使学生知道什么是 Taylor 级数，什么是 Maclaurin 级数，重点强调函数 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数的条件，即前面所述的定理，也就是说并不是任意函数都可展开为 x 的幂级数。要求学生必须熟记某些常见函数的幂级数展开式（前面已列出）。

第五讲 Fourier 级数

教学目的与要求：了解三角级数、三角函数系及三角函数系的正交性的概念，能够运用三角函数系的正交性将周期为 2π 的函数展开为 Fourier 级数。

知识点：三角级数、三角函数系及三角函数系的正交性，周期为 2π 的函数的 Fourier 级数，定义在区间 $(-\pi, \pi]$ 上的函数的 Fourier 级数。

重点：周期为 2π 的函数的 Fourier 级数。

难点：Fourier 系数的计算。

教学方式：讲授

教学思路：Fourier 级数是另一类函数项级数，这部分主要介绍周期为 2π 的函数的 Fourier 系数。首先引导学生回忆前面所学的函数的幂级数展开式的条件，再介绍三角函数系、三角函数系的特性。函数展开为三角级数与函数展开成幂级数讨论的问题是一致的，可根据三角函数系的正交性确定 Fourier 系数 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$)，然后由狄利克雷 (Dirichlet) 收敛定理判断函数的 Fourier 级数的收敛情况。通过举例使学生掌握怎样将周期为 2π 的函数展开为 Fourier 级数的方法，写展开式时特别强调，只有在函数的连续点处，级数收敛于 $f(x)$ ，最后简单介绍周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数，系数的确定只需作变量代换即可。

教学过程：

1. 三角级数与三角函数系的正交性

三角级数的一般形式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

其中系数 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$) 都是常数。

三角级数由函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\} \quad (2)$$

组成，此函数系称为三角函数系。

三角函数系的重要特性：

(1) 式 (2) 中的三角函数系中任何不同的两个函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于 0，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad (n \neq 1, \dots) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n \neq 1, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0, \quad (k, n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0, \quad (k \neq n, k, n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0, \quad (k \neq n, k, n = 1, 2, \dots)$$

以上等式可通过定积分来验证，由学生自己完成。

(2) 式 (2) 的三角函数系中任一函数的平方在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

三角函数系的这种性质，称为三角函数系在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性。

引导学生回忆函数 $f(x)$ 展开的幂级数讨论的两个问题。由此过渡，研究能否将一个已知函数 $f(x)$ 展开为形如式 (1) 的三角级数，必然解决如下问题：

(1) $f(x)$ 满足什么条件时，才能展开成式 (1) 的三角级数？

(2) 如果 $f(x)$ 能展开成三角级数，展开式中的系数 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) 如何计算？

2. 周期为 2π 的函数的 Fourier 级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且能展开成三角级数，即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

假定 (3) 式右端的级数可以逐项积分，并且用 $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 去乘 (3) 式右端后所得的函数项级数还可逐项积分。

(3) 式两端同乘以 $\cos nx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，在 $[-\pi, \pi]$ 上逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx)$$

根据正交性，当 $n = 0$ 时 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi a_0$

从而得 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ 。

当 $n \neq 0$ 时 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi a_n$

从而得 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ ($n = 1, 2, \dots$)。

类似地，用 $\sin nx$ 同乘 (3) 式两端，并逐项积分可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

将上面的结果合并起来就得到系数公式：

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (4)$$

由公式 (4) 定出的系数 a_0, a_n, b_n 叫做函数 f 的 Fourier 系数，将这些系数代入 (3) 式右端，所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

称为函数的 Fourier 级数。

为了表示 $f(x)$ 的 Fourier 级数与 $f(x)$ 的关系，通常用记号：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

右边的这个 Fourier 级数完全可能不收敛，即使收敛也未必收敛于 $f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 在什么条件下，它的 Fourier 级数收敛，且在什么情况下它收敛于 $f(x)$ ？为了回答这个问题，我们不加证明地叙述一个收敛定理。

定理 1 （狄利克雷（Dirichlet）收敛定理）设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，如果它在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛，并且

（1）当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$ ；

（2）当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$

这个收敛定理告诉我们，以 2π 为周期的函数 $f(x)$ ，只要是在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，即可以把一个周期分成有限多个单调区间，按（4）式计算出 Fourier 系数，得到的 Fourier 级数在 $f(x)$ 的连续点处收敛于 $f(x)$ 。定理中所要求的条件一般的初等函数与分段函数都能满足，这就保证了 Fourier 级数广泛的应用性。

另外还可得出， $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

例 1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数。

解：显然，它满足收敛定理的条件，在 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处不连续，其它点都连续，从而由收敛定理知 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛，并且当 $x = k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

当 $x \neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$ ，其 Fourier 系数如下：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1] \\
 &= \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{当 } n=1,3,5,\dots \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n=2,4,6,\dots \text{ 时} \end{cases}
 \end{aligned}$$

从而得 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right] + \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x + \dots$$

($-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$)

若将函数 $f(x)$ 理解为矩形波，那么 Fourier 级数表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的，这些正弦波的频率依次为基波频率的奇数倍。

例 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ 将 } f(x) \text{ 展开成 Fourier 级数。}$$

解：显然，它满足收敛定理的条件，在 $x = (2k+1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处不连续，其它点都连续，从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛，并且当 $x = (2k+1)\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

当 $x \neq (2k+1)\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$ ，其 Fourier 系数如下：

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi^2} \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$= \begin{cases} 1/n & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ -1/n & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

从而得 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2k-1)^2 \pi} \cos(2k-1)x + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx \right]$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$$

利用这个展开式，可以求得几个特殊的常数项级数的和。

当 $x=0$ 时， $f(0)=0$ ，于是有 $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

因为 $\sigma_2 = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots) = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$

所以 $\sigma_1 = \frac{\sigma}{3} = \frac{\pi^2}{24}$ $\sigma = 4\sigma_2 = \frac{\pi^2}{6}$ $\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$

3、定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上有定义，且满足收敛定理的条件，则 $f(x)$ 也可以展开成 Fourier 级数，其步骤如下：

(1) 在区间 $[-\pi, \pi)$ 或 $(-\pi, \pi]$ 外补充函数 $f(x)$ 的定义，使它拓广成周期为 2π 的周期函数 F （简称周期延拓）。

(2) 将 F 展开成 Fourier 级数。限制 $x \in (-\pi, \pi)$ ，此时 $F = f$ 这样便得到了 $f(x)$ 的 Fourier 级数，根据收敛定理，该级数在区间端点 $x = \pm\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(-\pi+0)]$ 。

例 3 将函数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开成 Fourier 级数

解：将 $f(x)$ 作周期延拓，所得函数在每点 x 处都连续，因此拓广的周期函数的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$ ，拓广的函数图形如下：

其 Fourier 系数如下：

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = 0$$

故得 $f(x)$ 的 Fourier 展开式如下：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

4、周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数

在实际问题中所遇到的周期函数，其周期不一定是 2π ，事实上只要通过自变量的变量代换就可以转化为以 2π 为周期的函数，从而得到其 Fourier 展开式。

定理 2 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的函数，且满足收敛定理的条件，则它的 Fourier 展开为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证：令 $x = \frac{l}{\pi} t$ ，则函数 $F(t) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ 就是以 2π 为周期的函数，并且满足收敛定理的条件，将 F 展开成 Fourier 级数

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

再将变量 t 代回到变量 x ，即作变量代换 $t = \frac{\pi}{l} x$ ，并注意到 $F(t) = F\left(\frac{\pi}{l} x\right) = f(x)$ 便有

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

例 4 设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，它在 $[-2, 2]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ k & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \text{ 将 } f \text{ 展开成 Fourier 级数。}$$

解：因为 $l=2$ ， $f(x)$ 的 Fourier 系数为

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 k dx = k$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} \frac{2k}{n\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

函数在 $x=2n(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处为第一类间断点，其 Fourier 级数的和在这些点的值为

$\frac{k}{2}$ ，将得到的系数 a_n, b_n 代入得：

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{n} \left(\sin x \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \\ (-\infty < x < +\infty, x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots)$$

对于定义在 $(-l, l)$ 上的非周期函数只要作周期延拓即可展开成 Fourier 级数。

小结：

本次课主要介绍周期为 2π 的函数的 Fourier 级数，要求学生必须牢牢记住下面两个步骤：

第一步：Fourier 系数的计算 a_0, a_n, b_n ；第二步：由狄利克雷收敛定理判断函数 $f(x)$ 的 Fourier

级数的连续点和间断点。写 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式时特别注意：等号只有在连续点成立。

对于定义在 $[-\pi, \pi)$ 上的函数，只需作周期延拓即可展开成 Fourier 级数。注意： x 必须限制在 $[-\pi, \pi)$ 上，对于周期为 $2l$ 的函数只需作变量代换就可以转化为以 2π 为周期的函数，从而得到其 Fourier 展开式，同理写展开式时，等式只在连续点成立。

第六讲 函数展开成正弦级数与余弦级数

教学目的与要求：理解正弦级数和余弦级数的概念，能够根据所给函数的奇偶特点将函数展开为正弦级数或余弦级数。

知识点：周期为 2π 的函数展开为正弦级数或余弦级数；定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数展开成正弦级数或余弦级数；周期为 $2l$ 的函数展开为正弦级数或余弦级数。

重点：周期为 2π 的函数展开为正弦级数或余弦级数。

难点：定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数展开成正弦级数或余弦级数。

教学方式：讲授。

教学思路：复习上节课周期为 2π 的函数的 Fourier 系数的计算公式，利用定积分的性质可知，当 $f(x)$ 为奇函数时， $a_n=0$ ；当 $f(x)$ 为偶函数时， $b_n=0$ 。由此得到的 Fourier

级数只含正弦项或余弦项，从而引出正弦级数、余弦级数的定义，计算过程与前面相同。

对于定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数，可先作奇延拓或偶延拓，然后再作周期延拓，最后限制 $x \in (0, \pi]$ ，即可得到 $f(x)$ 的正弦级数或余弦级数。根据周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数展开式同理可得 $f(x)$ 为奇函数或偶函数的正弦级数或余弦级数。

教学过程：

1、周期为 2π 的函数的正弦级数或余弦级数

由上节课的例题可以看出，一个函数展开成 Fourier 级数的结果，可能既有余弦项又有正弦项（例 2），也可能只含正弦项（例 1），或只含余弦项（例 3）。这些规律我们把它归纳成下面的定理。

定理 1 当周期为 2π 的奇函数 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数时，它的 Fourier 系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

而当周期为 2π 的偶函数 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数时，它的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

证：设 f 为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$

由于 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ ，而 $f(x) \cos nx$ 也为奇函数，利用奇函数在对称区间上的

的积分为 0 的性质可知 $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

又 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ ，而 $f(x) \sin nx$ 却是偶函数，利用偶函数在对称区间上的积分性质得 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$ 。

类似可证 $f(x)$ 为偶函数的结论。

根据上述定理，在展开函数 $f(x)$ 成 Fourier 级数时，应当先判断一下 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的奇偶性，据此选择相应的公式计算 Fourier 系数，使计算尽量简化。

例 1 设周期函数 $f(x)$ 在一个周期上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ ，试将

其展开成 Fourier 级数。

解： 由图形的对称性可知 $f(x)$ 为偶函数，因此

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi - x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \pi \\
 b_n &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 处处连续，故所求的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$ 即

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上表达式为 $f(x) = x$ ，将 $f(x)$ 展开成 Fourier 级数。

解：当 $x = (2k + 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时 $f(x)$ 不连续，因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数在点 $x = (2k + 1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$$

在连续点 $x \neq (2k + 1)\pi$ 处收敛于 $f(x)$ 。显然 $f(x)$ 是周期为 2π 奇函数，此时

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\
 &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

从而得 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots)$$

2、定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数

根据前面的讨论，可得定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数的步骤如下：

(1) 作奇延拓或偶延拓

$$\text{奇延拓} \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{偶延拓} \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

(2) 对函数 $F(x)$ 作周期延拓，并展开成 Fourier 级数，这个级数必定是正弦级数或余弦级数。

(3) 限制 $x \in (0, \pi)$ ，此时 $F = f$ ，这样便得到 f 的正弦级数或余弦级数。

例 3 将函数 $f(x) = x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 分别展开成正弦级数和余弦级数。

解：先求正弦级数，为此对函数 f 进行奇延拓

$$\text{即令} \quad F(x) = \begin{cases} x + 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ x - 1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x + 1) \sin nx dx$$

$$\text{根据公式有} \quad = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + 2}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ -\frac{2}{n}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

而经过奇延拓和周期延拓后的函数在端点 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 处间断，级数的和显然为 0，它不代表原来函数 $f(x)$ 的值。这样得到函数 $f(x)$ 的正弦级数为

$$x + 1 = \frac{2}{\pi} \left[(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{\pi + 2}{3} \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \cdots \right] \quad (0 < x < \pi)$$

再求余弦级数，为此对函数 $f(x)$ 进行偶延拓，即令

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x+1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

根据公式，有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) dx = \pi + 2$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

经过偶延拓和周期延拓后的函数是处处连续的，所以，我们得到 $f(x)$ 的余弦级数为

$$x+1 = \frac{2}{\pi} + 1 - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

注意：写 $f(x)$ 的正弦级数或余弦级数时，特别注意 x 的取值范围。

3、周期为 $2l$ 的函数的正弦级数或余弦级数

定理 2 设 f 是周期为 $2l$ 的函数，且满足收敛定理的条件。

在 f 为奇函数，则它的 Fourier 展开式为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$

其中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$

若 f 为偶函数，则它的 Fourier 展开式为 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$

其中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$

定理的证明与定理 1 类似（略）

对于定义在 $(0, l)$ 上的非周期函数只要将 $f(x)$ 奇延拓或偶延拓，再作周期延拓即可展开成正弦级数或余弦级数。

例 4 将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数：

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 < x \leq \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

解：由题意对 $f(x)$ 作奇延拓，因此有：

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{1} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi x}{1} \sin \frac{n\pi x}{1} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数且 } n > 1 \\ -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} 2n}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{1} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n}{4n^2-1} \sin \frac{2n\pi x}{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

例 5 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 在 $0 < x < 2\pi$ 上展开成 Fourier 级数。

解：令 $t = x - \pi$ ，则 $-\pi < t < \pi$ 而 $f(x) = f(t + \pi) = -\sin \frac{t}{2} = F(t)$

补充函数 $F(t) = -\sin \frac{t}{2}$ ($-\pi < t < \pi$) 的定义。令 $F(-\pi) = 1$,

将 F 作周期延拓，拓广的周期函数满足收敛定理的条件，它的 Fourier 级数在 $(-\pi, \pi)$ 内收敛于 F 。

其 Fourier 系数如下：

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\sin \frac{t}{2}\right) \sin nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \frac{1-2n}{2} t - \cos \frac{1+2n}{2} t \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1-2n} \sin \frac{1-2n}{2} t \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{1+2n} \sin \frac{1+2n}{2} t \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= (-1)^n \frac{8n}{\pi(1-4n^2)} \end{aligned}$$

所以 F 的 Fourier 展开式为

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8n}{\pi(1-4n^2)} \sin nt \quad (-\pi < t < \pi)$$

代换到 x 得：

$$\cos \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(1-4n^2)} (-1)^n \sin n(x - \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \sin nx \quad (0 < x < 2\pi)$$

由此例可知，对于非对称区间的情形，只要作一个适当的变量代换可转化为对称区间的情形，然后按上述情形展开成 Fourier 级数，再代回到原来变量即可得其 Fourier 展开式。

小结：

这部分主要是针对函数 $f(x)$ 的奇偶性的特点，将周期函数展开为 Fourier 级数，即正弦级数或余弦级数。所以，把周期函数展开为 Fourier 级数时，必须先观察 $f(x)$ 的特点，如果 $f(x)$ 为奇函数，那么 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，它的 Fourier 级数必为正弦级数；若 $f(x)$ 为偶函数，那么 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，它的 Fourier 级数必为余弦级数。对于定义在 $[0, \pi]$ 上的函数展开为正弦级数或余弦级数，只需先作奇延拓或偶延拓，再作周期延拓，把周期延拓后的函数展开为 Fourier 级数，最后限制 $x \in (0, \pi)$ 即可。

第七讲 无穷级数习题课

教学目的与要求：理解数项级数、正项级数、交错级数、幂级数的概念，会利用审敛法判断级数的敛散性，会求幂级数的收敛半径和收敛区间以及将周期函数展开的 Fourier 级数；熟练记住一些常用的幂级数的展开式。

知识点：

1. 数项级数、正项级数、交错级数和任意项级数；
2. 幂级数的收敛半径和区间、幂级数收敛的性质；
3. 函数展开成幂级数的方法；
4. 函数的 Fourier 级数。

重点：正项级数的审敛法和交错级数的审敛法；求幂级数的收敛半径和区间；求幂级数的和函数。

难点：正项级数的比较审敛法；函数的 Fourier 系数的计算。

教学方式：讲授和练习。

教学思路：按章节顺序复述基本内容（见上述知识点）。包括定义、性质、定理及基本公式以及要注意的一些问题；然后指出学生作业中存在的问题，讲述练习中的难题。

教学过程：

1、复习本章所述内容

- (1) 数项级数的定义、性质、收敛的必要条件；
- (2) 正项级数的四个审敛法、交错级数的审敛法和任意项级数的绝对收敛和条件收敛；
- (3) 怎样求幂级数的收敛半径和收敛区间，利用收敛幂级数的性质求幂级数的和函数；
- (4) 函数展开成幂级数的方法：间接展开法和直接展开法；
- (5) 周期函数的 Fourier 级数的展开。

2、指出作业中存在的问题

- (1) 正项级数比较审敛法的错误结论

若 $u_n \leq v_n$ ，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

若 $u_n \leq v_n$ ，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。

上述两个错误结论，主要是学生对概念的理解不深而造成。

(2) 审敛法的错误交叉使用

正项级数用交错级数审敛法判断，还有的学生由 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，直接得出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

的错误结论。

(3) 求幂级数的和函数时，忽略了 $S(0)$ 的值有可能不为 0。

(4) 周期函数的 Fourier 级数展开式中，忽略了间断点的排除，也就是说，等式只有在连续点成立。

3、讲解练习中的难题

例 1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1}\right)^n$ ($a > 0$) 的敛散性。

解：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{na}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} = a$

由柯西审敛法知

当 $0 < a < 1$ 时，级数收敛；

当 $a > 1$ 时，级数发散；

当 $a = 1$ 时，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$ 因而发散。

例 2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，且 $a_n < b_n < c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

证：因为 $a_n < b_n < c_n$

$0 < b_n - a_n < c_n - a_n$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛，由比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 也

收敛，又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n - a_n) + a_n]$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

例 3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - 3n + 2)^x}$ 的绝对收敛和条件收敛性。

解：当 $x \leq 0$ 时，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - 3n + 2)^x} \neq 0$ 因而级数发散。

当 $x > \frac{1}{2}$ 时，由于 $\left| \frac{(-1)^n}{(n^2 - 3n + 2)^x} \right| = \frac{1}{[(n-1)(n-2)]^x} < \frac{1}{(n-2)^{2x}}$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^{2x}}$ 收敛。所以，原级数绝对收敛。

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时， $\left| \frac{(-1)^n}{(n^2 - 3n + 2)^x} \right| = \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} \right]^x > \frac{1}{(n-1)^{2x}}$

而级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{2x}}$ 发散，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n^2 - 3n + 2)^x} \right|$ 发散。

又原级数为交错级数，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n^x(n-1)^x} - \frac{1}{(n-1)^x(n-2)^x} \\ &= \frac{1}{(n-1)^x} \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n-2)^x} \right] < 0 \end{aligned}$$

即 $u_n > u_{n+1}$ 所以，原级数条件收敛。

例 4 设级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ ，求和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和。

解：令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ ，两边同时积分，得：

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = \frac{x}{2} \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^3}{2(2-x^2)} \quad (x < \sqrt{2})$$

从而 $S(x) = \left(\frac{x^3}{4-2x^2} \right)' = \frac{x^2(6-x^2)}{2(2-x^2)^2}$

令 $x=1$ ，得 $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} = \frac{5}{2}$

所以,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \stackrel{n=m+1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

例 5 将幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! 2^{2n-2}} x^{2n-1}$ 的和函数展为 $x-1$ 的幂级数。

解: 令
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)! 2^{2n-2}} x^{2n-1}$$

两边同时求导, 得:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)! 2^{2n-2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} \\ &= \cos \frac{x}{2} \\ \therefore S(x) &= \int_0^x \cos \frac{x}{2} dx + S(0) = 2 \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} &= 2 \sin \left(\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} \right) \\ &= 2 \left[\sin \frac{1}{2} \cos \frac{x-1}{2} + \cos \frac{1}{2} \sin \frac{x-1}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n} + 2 \cos \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ \pi + x & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数 ($f(x)$ 的周期为 2π),

并计算 $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

解: 因为
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + x) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \sin nx dx - x \sin nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \frac{4}{n^2 \pi} & n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \quad (x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi])$$

当 $x=0$ 时, $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 π

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \pi$$

$$\text{即 } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

注意：不能在 $f(x)$ 的展开式中令 $x=0$, 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续。

例 7 将 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开为正弦级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ 的和。

解：作奇延拓, 再作周期延拓, 则

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} (\cos n\pi - 1) + \frac{\pi}{n} \cos n\pi \right] \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi)$$

上式中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \underset{n=2k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{即 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

例 8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性, 如收敛指出是绝对收敛还是条件收敛。

解：因为 $n\pi < \sqrt{n^2+1}\pi < (n+\frac{1}{2})\pi$

令 $\alpha = \sqrt{n^2 + 1}\pi - n\pi$ 显然 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2 + 1}\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n(\pi + \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \alpha$$

$$\text{而 } |(-1)^n \sin \alpha| = \sin \sqrt{(n^2 + 1) - n}\pi = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 1, \text{ 从而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \sin \alpha| \text{ 发散。}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0$$

同时 $\sin \alpha$ 单调减少。所以，原级数条件收敛。

例 9 证明如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛。

证：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，由正项级数的比较审敛法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 也收敛。 又 } (\sqrt{a_n} - \frac{1}{n})^2 \geq 0 \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2} (a_n + \frac{1}{n^2})$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + \frac{1}{n^2})$ 收敛，由正项级数的比较审敛法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛。

例 10 利用函数 x 与 x^2 在 $(0, \pi)$ 内的余弦展开式，证明等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

解：(1) 把 x 展开为 $(0, \pi)$ 内余弦级数

$$\text{因为 } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{4}{n^2 \pi} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{所以, } x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 < x < \pi)$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} \quad \textcircled{1}$$

(2) 把 x^2 展开为 $(0, \pi)$ 内的余弦级数

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \begin{cases} -\frac{4}{n^2}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{4}{n^2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[-\cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots \right] \quad (0 < x < \pi)$$

$$\text{即 } -\cos x + \frac{1}{2^2} \cos 2x - \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{4^2} \cos 4x + \dots = \frac{3x^2 - \pi^2}{12} \quad \textcircled{2}$$

由①、②得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} + \frac{3x^2 - \pi^2}{12} + \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 < x < \pi)$$

小结：通过本次习题课的讲解，使学生对概念的理解更加深入、全面，有利于提高综合运用知识的能力。